

О некоторых ограничениях формально-математической методологии¹

Шиян Т.А. О некоторых ограничениях формально-математической методологии // Вестник РГГУ. Серия "Философия". №7/08. М, 2008. С. 307-318.

Сохранено с сайта: <http://taras-shiyan.narod.ru>.

E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

В статье анализируются границы применимости формальной методологии в логико-математических исследованиях и выявляется неизбежность применения неформальных рассуждений в повседневной математической работе, поскольку в массиве используемых логико-математических символов наблюдаются явления синонимии, полисемии и омонимии.

1. Постановка проблемы. Широко известные ограничительные теоремы, – о неразрешимости, о неполноте и т.п., – накладывают «логические» ограничения на использование формальной методологии, в частности, на ее использование в качестве исключительного средства полного теоретического обоснования математики. В настоящей статье рассматривается проблема, которая накладывает *фактически* ограничения на использование формальной методологии, ограничения, обусловленные особенностями настоящего, исторически сложившегося логико-математического дискурса. Эта проблема тесно связана с предметом символической логики и создает серьезные методологические трудности на пути некоторых современных тенденций в развитии логики.

В предмете современной символической логики выделяется несколько классов объектов, понимаемых в качестве формально-семиотических, т.е. построенных на базе некоторого формального языка. В первую очередь, это – исчисления (множество операций над формулами некоторого формального языка) и формальные теории (множество формул некоторого формального языка, замкнутое, относительно некоторого множества операций – правил вывода).

Среди основных тенденций в развитии современной логики укажем на переход от исследования отдельных «логик» (исчислений, формальных теорий и т.п.) к исследованию их классов и исследованию соотношений (по разным основаниям) различных «логик». В качестве примеров в статье разбираются ситуации, возникавшие перед автором в ходе исследований по сравнению нескольких десятков «формальных силлогистик»¹. Многие из применяющихся в этих исследованиях методик зависят от предварительного решения о соотношении языков изучаемых «логик»: сформулированы ли они в одном, разных или частично совпадающих языках.

Но и вне этих тенденций любой человек, работающий в логике, формальной математике или только изучающий эти области, вынужден соотносить формальные построения и полученные результаты из разных текстов и решать, идет ли речь об одном и том же «объекте» или о разных.

Разные авторы используют различные системы математической нотации, различающиеся как символиккой, так и синтаксисом. Если достаточно полно рассматривать систему обозначений, используемых в современном логико-математическом дискурсе, то мы обнаружим такие «естественно-языковые» явления как синонимию, омонимию, полисемию. Проблему, рассматриваемую в настоящей статье, можно сформулировать так: *каким образом мы сравниваем формально-семиотические объекты? на основании чего*

¹ © Шиян Т.А., 2008.

мы имеем право сказать, что два формальных объекта совпадают или не совпадают между собой?

Мнение автора, основанное на проведенных исследованиях: *данная проблема не имеет теоретического решения в рамках формальной методологии*. Формальная методология и основанные на ней логико-математические методики корректно применимы только в некоторых узко очерченных рамках (обычно совпадающих с границами текста), где авторский замысел отождествить или различить некоторые формальные объекты находит свое выражение (при конструировании) в соответствующем выборе семиотических средств (далее буду называть эти границы *формальным контекстом*).

В силу наличия рассматриваемой проблемы, формальная методология не может служить универсальной методологией и философией математики (ограничительные теоремы не лишают ее такой функции) и остается в качестве только одного из методов (применимого в рамках индивидуальной «конструкторской» работы).

2. Формальная методология и семиотические навыки. Формальная методология существенным образом связана с теоретико-множественным подходом. Оба направления опираются в качестве предпосылки на умение (легко и однозначно), во-первых, различать «разные» объекты и, во-вторых, идентифицировать разные появления «одного» объекта именно как «один», а не «разные» объекты. Суть формального подхода точно выражена Френкелем и Бар-Хиллелом в «Основаниях теории множеств»: «во внимание должны приниматься только вид и порядок символов, к последовательностям которых применяются правила вывода, но никак, например, не «значения» этих символов»². Для использования данного принципа «достаточно было бы самого минимума интуиции, так называемой «глобальной интуиции», нужной для умения решить, совпадают ли два рассматриваемых символа или нет»³.

Рассмотрим вначале это умение, необходимое для работы и названное Френкелем и Бар-Хиллелом вслед за Гильбертом «глобальной интуицией». Если не постулировать наличия у людей особого способа восприятия (интуиции) и естественного, внекультурного существования знаков, то речь идет о некотором семиотическом навыке. Он формируется у человека в процессе его социализации (освоения родной, в первую очередь языковой, культуры и обучения) и позволяет в различных семиотических явлениях видеть «разные» знаки или опознавать «один и тот же» знак. Этот навык является достаточно стабильным у носителей одной культуры и может существенно различаться у носителей разных культур. Этот навык предшествует занятиям математикой, хотя, безусловно, развивается и трансформируется в ходе этих занятий. При анализе математики нас интересует письменный вариант данного навыка.

Рассматривая общекультурные семиотические навыки, легко заметить, что критерии различения/неразличения письменных знаков зависят от конкретных контекстов. Мы различаем разные знаки и разные варианты одного знака. В частности, мы грамматически различаем буквы русского языка и отличаем их строчное написание от заглавного. В некоторых специальных контекстах различают характеристики почерка, размер букв, используемые шрифты, применяемые стили оформления и т.п. В математическом дискурсе, как и в других сферах жизни, учет этих характеристик не однозначен и не последователен. Для математики, как и для культуры в целом, базовым является различение «разных» знаков (без учета вариантов их начертания) и «грамматическое» различение заглавного и строчного начертания букв (учет регистра). Уточнение (учет некоторых вариантов) или «огрубление» (не различимость некоторых знаков) этой базовой системы различений/отождествлений обычно явно оговаривается.

Поскольку все функционирующие в культуре письменные знаки имеют свое устойчивое индивидуальное название, то разное или одинаковое именование двух графем является достаточным критерием для их различения/отождествления. Например, слово

«амперсант» обозначает знак «&», но не применимо к знаку «^», следовательно, это разные знаки, а не просто разные варианты одного знака.

При чтении (или написании) одного текста (внутри одного формального контекста) проблема опознания символов и выражений, как правило, не стоит, поскольку авторские семиотические навыки («глобальная интуиция») и авторское намерение различать или отождествлять некоторые символы и их последовательности находят воплощение в выборе соответствующих семиотических средств. Но достаточно очевидно, что невозможно ограничиться индивидуальной конструктивно-писательской деятельностью, поскольку необходимо учитывать результаты предшественников и коллег, описанные в различных текстах. Разные авторы используют различные системы математической нотации, различающиеся как символиккой, так и синтаксисом. Поэтому, переход от текста к более широкому дискурсу (например, к рассмотрению некоторого эмпирически сформированного множества текстов по одной теме) приводит к сбоям в применении формальной методологии.

3. О возможности формализации *ad hoc*. Понятно, что в своей повседневной научной работе логики и математики как-то проводят отождествления/различения символов и сложных выражений так, что рассматриваемая методологическая проблема обычно вообще не замечается. Но, поскольку сбой в применении формальной методологии все же имеет место, то результаты исследований, в которых использовался такой *интерконтекстуальный* (между формальными контекстами) перенос результатов, должны иметь другой теоретико-познавательный статус (с точки зрения формальной идеологии – более низкий), чем чисто формальное исследование.

В принципе, ситуацию можно почти всегда спасти, отрефлексирав и описав *ad hoc* проведенные отождествления и различения некоторым отношением или отображением. Это «решение» имеет несколько слабых мест.

Во-первых, полученный результат при этом ослабляется. Так, если в работе был (как кажется) получен некоторый результат A , зависящий от некоторых ранее полученных результатов, использованных через интерконтекстуальный перенос, то учет проведенной при переносе интерпретации B приводит к ослаблению результата A (на самом деле, немного) до $(B \supset A)$.

Во-вторых, возможных (содержательно корректных) способов провести различение/отождествление символов двух формальных языков – много (для счетных языков – по крайней мере, счетно). Соответственно, если исследование требует учета всех возможных вариантов соотнесения двух формализмов, то оно *фактически* не выполнимо уже при достаточно большом конечном числе возможных способов соотнесения.

В-третьих, это все же «решение» *ad hoc*, т.е. некоторый подгон результатов. А хотелось бы иметь некоторую, хотя бы полуформальную методику проведения интерконтекстуального сравнения двух формализмов. Кроме того, построение теории такого сравнения – единственный способ учесть все возможные варианты сравнения при достаточно большом их числе.

4. Ситуативность интерконтекстуальных сравнений. Выше на примере знаков для конъюнкции была проиллюстрирована неприменимость формальной методологии (в чистом виде) для сравнения формализмов, построенных в разных нотациях. Аналогичная ситуация имеет место и в случае других синонимичных обозначений. Так, отрицание может передаваться знаками « \sim » и « \neg », эквивалентность – « \sim » и « \equiv », импликация – знаками « \supset » и « \rightarrow », силлогистические связки – буквами « a » и « A », « i » и « I », « t » и « T » и т.п. Различив соответствующие значки, мы должны различить также и сформированные на их основе формальные языки, формальные теории и другие формально-семиотические объекты.

Если же мы, во-первых, исходим из тождества некоторых формализмов, несмотря на использование для их построения разных нотаций, во-вторых, не хотим отказываться от использования формальной методологии и, в-третьих, не удовлетворяемся «обоснованием» *ad hoc*, то необходимо как-то модифицировать используемые принципы сравнения знаков (изменить экспликацию «глобальной интуиции»).

Можно попробовать скорректировать принципы сравнения букв и других типов знаков. Начнем со второго случая. Допустим, мы постулируем, что в рамках формально-математического дискурса синонимичные обозначения одних и тех же связок – тождественны. В частности, отождествляем знаки для отрицания « \sim » и « \neg » и знаки для эквивалентности « \sim » и « \equiv ». Но, поскольку один и тот же знак « \sim » в современном математическом дискурсе может использоваться как для обозначения отрицания, так и для обозначения эквивалентности, то получаем (на основании транзитивности тождества), что знаки « \neg » и « \equiv » – тождественны. Иначе говоря, отождествление в логико-математической практике знака « \sim » то со знаком « \neg », то с « \equiv » носит ситуативный характер и не может быть генерализовано. Аналогичный результат имеем и в случае с импликацией, поскольку знак « \supset » обычно используется для обозначения материальной (классической) импликации, а знак « \rightarrow » может использоваться как для обозначения любой импликации (\supset является частичным синонимом \rightarrow), так и для обозначения только неклассических импликаций (\supset и \rightarrow противопоставлены друг другу). Следовательно, отождествление/различение знаков « \supset » и « \rightarrow » также носит ситуативный характер.

Ситуативный характер системы сравнения выявляется и при использовании букв. Рассмотрим следующий пример. В ряде работ В.А. Смирнова⁴, Л.И. Мчедlishvili⁵ и В.И. Маркина⁶ рассматривались некоторые силлогистические теории в языке с простыми общими терминами и четырьмя классическими силлогистическими связками. Хотя содержательно подразумевается, что эти теории построены в одном и том же языке, указанные авторы использовали в своих формальных построениях разные алфавиты и несколько различных синтаксис. Так, например, общеутвердительное высказывание у Смирнова может представляться последовательностью вида «ASP», у Маркина – «SaP», а у Мчедlishvili – «AaB». Таким образом, исходя из содержательных соображений и целей исследования, мы должны «A» в «ASP» отождествить с «a» в «SaP» и «AaB», но различить с «A» в «AaB».

Подводя итог, отметим два момента. Во-первых, отождествление синонимичных знаков носит ситуативный характер. Во-вторых, в силу многозначности (на уровне логико-математического дискурса) используемых знаков мы также ситуативно должны различать некоторые использования одного и того же знака. Таким образом, принцип формального сравнения знаков ситуативно оказывается то «адекватным», то слишком слабым, то слишком сильным, то есть является логически случайным.

Принцип формального различения графем недостаточен еще и по другой причине. Проанализируем традиционное различение знаков « \wedge » и « \vee », для чего модифицируем один из рассматривавшихся выше примеров и рассмотрим формулировки КЛВ в алфавитах $\langle \wp; \neg, \wedge \rangle$, $\langle \wp; \neg, \& \rangle$ и $\langle \wp; \neg, \vee \rangle$. Формально мы должны все три алфавита различить, но тогда возникает рассматривавшийся выше парадокс с формулировками КЛВ в $\langle \wp; \neg, \wedge \rangle$ и $\langle \wp; \neg, \& \rangle$. Если же мы отождествляем « $\&$ » и « \wedge », то почему мы должны отличать их от « \vee »? Все три алфавита формально эквивалентны. Языки, построенные на основе этих алфавитов, также эквивалентны, что очевидно из определения формулы: 1) пропозициональный символ является формулой, 2) если A и B – формулы, то $\neg A$ и $A * B$ – формулы (где метазнак «*» обозначает « $\&$ », « \wedge » или « \vee » в зависимости от алфавита). Таким образом, обоснованное различение знаков « \wedge » и « \vee » возникает только на дедуктивном уровне. Но чтобы построить дедуктивную систему необ-

ходимо предварительно выбрать некоторый алфавит и построить на его основе формальный язык. Претендуя на «строго формальную» работу получаем замкнутый круг. Но поскольку на практике никаких заминок не возникает, то получается, что при сравнении алфавитов и языков мы неявно используем неформальные, содержательные соображения, в частности, учитываем замысел дальнейшего использования рассматриваемых формализмов или некоторую традицию использования значков.

Получается, что, решая задачу сравнения языков, описанных в разных текстах, необходимо учитывать не только их строго формальные характеристики, но и придаваемый языковым выражениям дедуктивный смысл, неформально придаваемый смысл, существующую традицию отождествления/различения тех или иных знаков. Исходя из того, что перенос формальных результатов из текста в текст основан на содержательной интерпретации используемых формализмов, следует, что в подобных ситуациях мы выходим за пределы корректного использования формальной методологии.

5. Роль научной традиции и случайных факторов. Хотя в современной логике и провозглашается использование формальной методологии, но формальные алфавиты редко задаются как простой набор графем. Фактически, алфавит обычно задается как набор некоторых групп знаков, где каждая группа содержательно интерпретируется как знаки одного семиотического типа: «пропозициональные символы», «пропозициональные связи», «силлогистические связи» и т.п. Внутри некоторых групп знакам придается еще и индивидуальная интерпретация, например, внутри группы «пропозициональные связи» выделяются: «знак конъюнкции», «знак дизъюнкции» и т.д. При этом декларируется, что содержательная интерпретация, задаваемая групповыми и индивидуальными ярлыками, не оказывает влияния на наши формальные рассуждения и может быть элиминирована. Это, возможно, справедливо для работы в рамках формальных контекстов, но не верно для интерконтекстуальных сравнений, как было показано выше. Во всех разобранных выше случаях сравнения корректное решение возможно только на основе именно содержательных интерпретаций. Кроме того, во всех аналогичных случаях для корректного сравнения, как правило, вполне достаточно информации обычно содержащейся в групповых и индивидуальных языках. К сожалению, учет при интерконтекстуальных сравнениях содержательных интерпретаций, задаваемых ярлыками, не решает всех классов возникающих проблем.

Понятно, что один и тот же знак формального языка можно наделить разным формальным смыслом. Но вопрос, почему в одном случае для передачи дедуктивно разных знаков используются разные графемы, а в другом случае – одна графема? Разберем несколько случаев.

Случай 1. В рамках одного формального построения мы должны использовать разные графемы для дедуктивно разных знаков. Если мы хотим две теории объединить в одну, то все знаки, которые в этих теориях имеют разный смысл, но передаются одинаковыми графемами, должны быть графически разделены. Так, например, пришлось поступить В.А. Смирнову в статье «Дефинициальная эквивалентность систем силлогистики»⁷, поскольку примененный там метод сравнения теорий по дефинициальной выразимости подразумевает сведение сравниваемых теорий к теории в объединенном языке. Так, например, общеутвердительная силлогистическая связка в фундаментальной силлогистике (где допускается пустота субъекта) и в системе С2 (силлогистика Аристотеля-Оккама, в которой субъект истинного общеутвердительного высказывания не пуст) передается разными буквами, хотя во всех остальных работах Смирнова, как и в работах других авторов, эти две теории формулируются в одном и том же языке. Задача систематического сравнения в рамках одного текста (или серии преемственных текстов) описанных в литературе формальных силлогистик ставит перед выбором: передавать дедуктивно разные интерпретации, например, общеутвердительной силлоги-

стической связки разными графемами (как это сделано Смирновым в указанной статье) или одной графемой (как это принято в современной логической традиции)? Понятно, что принятие первого или второго варианта сравнения языков в большинстве случаев приведет к разным результатам сравнения формальных теорий (сформулированных в этих языках). Оба варианта соотнесения формально допустимы, но логически не совместимы, поскольку невозможно два объекта отождествлять и различать одновременно в одном и том же смысле. В данном случае, мне кажется более разумным выбор в пользу существующей традиции, но очевидно, что и подход, реализованный в статье Смирнова, также совершенно законен.

Случай 2. Хотя разные понимания общеутвердительной силлогистической связки «Все ... есть ...» принято обозначать одним знаком, сложилась традиция графического различения некоторых пониманий частноутвердительной связки «Некоторые ... есть ...». Понимание слова «некоторый», идущее от Аристотеля, – «некоторый, а, может быть, и все», – не единственно возможное в русском языке. Н.А. Васильевым в начале XX в. был предложен вариант силлогистики с пониманием «некоторый» как «только некоторый». В идущей от В.А. Смирнова традиции связку «Некоторый ... есть ...» в васильевском понимании (обозначается «t» или «Т») принято отличать от связки в аристотелевском понимании («i» или «I»). Возникает следующая дилемма. Если мы исходим из общей лингвистической передачи общеутвердительного высказывания «Все ... есть ...», то было бы последовательно рассуждать аналогичным образом и в случае с частноутвердительными высказываниями. Если же мы исходим из различного смыслового (и дедуктивного) понимания частноутвердительной связки «Некоторый ... есть ...» у Аристотеля и у Васильева, то было бы последовательно поступить аналогичным образом и в случае с общеутвердительными высказываниями (как это делалось в упоминавшейся статье Смирнова). Думаю, что в обоих случаях логики (обычно не осознавая этого) исходят из сформировавшейся традиции именно такого отождествления и различения символов, а не из каких-либо теоретических соображений.

Случай 3. Следующий сложный случай связан с интерпретацией связки «есть» Онтологии С. Лесьневского. В литературе описан ряд теорий, реализующих в бескванторных предикатных языках силлогистического типа интерпретацию Лесьневским связки «есть». Поскольку эта связка обычно передается в формальных языках греческой буквой «ε» и маркируется ярлыком «связка Лесьневского «есть»», то обычно ее автоматически отличают от силлогистических связок, хотя в сингулярных силлогистиках (с единичными терминами) также используется связка «есть» (при этом она обычно обозначается другими значками и маркируется ярлыком «единичноутвердительная силлогистическая связка»). Следование современной логической традиции подразумевает принятие этого различения. Оно кажется вполне естественным, поскольку за системами Лесьневского прочно укрепилась репутация «экзотических». Но если массив анализируемых текстов попала статья В.А. Бочарова «Силлогистики с сингулярными терминами»⁸, то возникает ситуация несовместимого выбора, аналогичная случаю 1. В статье Бочарова строится ряд сингулярных силлогистик, в том числе и в стиле Лесьневского. Во всех этих системах для передачи связки «есть» использовалась одна и та же буква. Поскольку нет оснований игнорировать существование и результаты данной статьи, то в рамках массового сравнения формальных силлогистик вместо традиционного различения связки «есть» в смысле Лесьневского и связки «есть» в остальных смыслах приходится выбрать передачу связки «есть» во всех случаях одним и тем же знаком. При этом, результат массового сравнения теорий (и сводный граф теорий) претерпевает существенную трансформацию.

Итак, случаи 1 и 2 демонстрируют обращение при интертекстуальных сравнениях к современной научной традиции некоторого отождествления/различения, случаи 1 и 3 –

влияние на результаты сравнения случайного фактора наличия или отсутствия в массиве публикаций описания теорий с нестандартной формализацией, а случай 3 – игнорирование существующей научной традиции с целью сохранения непротиворечивости.

6. Заключение. Подводя итог, можно выявить основные факторы, оказывающие влияние на результаты интерконтекстуального сравнения. При интерконтекстуальном сравнении формализмов приходится учитывать (в порядке усиления обязательности критерия при соблюдении требований формальной методологии): (1) внешний вид графем, (2) их формальные определения, (3) неформально придаваемый смысл, (4) существующую в научной культуре традицию отождествления / различения символов, (5) специальные, противоречивые случаи, создаваемые случайным фактором наличия публикаций с нетрадиционной формализацией. Автор текста всегда может принять некоторое решение (не противоречащее формальному критерию) по поводу сравнения используемых формализмов, узаконив его соответствующими относительно разумными пояснениями. Опора на научную традицию вполне обосновывает игнорирование формального критерия сравнения и содержательных интерпретаций, а опора на содержательные интерпретации – игнорирование формального критерия сравнения графем.

Исследования, проведенные автором, привели его к выводу о невозможности построения общей теории интерконтекстуальных сравнений. В разных ситуациях необходимо учитывать разные факторы и окончательные «оптимальные» решения могут быть противоположными для разных ситуаций. Кроме того, думаю, что в настоящем исследовании вскрыты далеко не все факторы, влияющие на сравнение формализмов; вполне возможно, что количество таких факторов вполне может оказаться бесконечным.

Анализируемая в статье проблема вновь оживляет другую, очень старую проблему о способе существования математических (и теперь уже логических) объектов. Если логико-математические объекты существуют (пусть только в универсуме математики) независимо от описывающих их текстов, то поставленная проблема интерконтекстуального сравнения формально-семиотических объектов решается соотношением двух формальных конструкций через их «денотаты». Впрочем, автору не понятно, как такое сравнение возможно без использования некоторого «непосредственного усмотрения». Если же логико-математические объекты существуют только через описывающие их тексты (автор склоняется именно к такому решению) и у нас нет критериев однозначного сравнения формализмов, описанных в разных текстах, то предмет и получаемые результаты логики и математики существенно *зависят от принимаемых каждым автором решений* об отождествлении/различении сравниваемых формальных объектов. В этом случае предмет логико-математических исследований оказывается зависимым от случайных, нематематических факторов и, в принципе, может оказаться противоречивым из-за несовместимых решений разных исследователей.

¹ Шиян Т.А. Множество формальных силлогистик с простыми «общими» термами (структурное описание и количественный анализ) // www.logic.ru. Электронный журнал «Logical Studies». №8; Шиян Т.А. Формально-историческое исследование нескольких групп формальных силлогистик // www.logic.ru. Электронный журнал «Logical Studies». №10; Информационная система по формальным теориям Theo.ru; и др.

² Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1966. С. 319.

³ Там же.

⁴ Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М., 1987.

⁵ Мчедlishvili Л.И. Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.

⁶ Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.

⁷ *Смирнов В.А.* Дефинициальная эквивалентность систем силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН, 1993. М., 1994.

⁸ *Бочаров В.А.* Силлогистики с сингулярными терминами // Современная логика и методология науки. М., 1987.