Семиотический анализ математической символики: синонимия, полисемия, омонимия, антонимия, конверсия[1]

Шиян Т.А. Семиотический анализ математической символики: синонимия, полисемия, омонимия, антонимия, конверсия // Гуманитарное измерение меняющегося мира: Сборник статей кафедры Философии и Гуманитарных Наук. М.: Издат. центр ЕАОИ, 2008. С. 219-139.
Сохранено с сайта: http://taras-shiyan.narod.ru.
E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

1. Историко-методологическое введение

Математический аппарат, традиционно, применяется для моделирования и анализа тех или иных внематематических «реальностей», в том числе и в гуманитарной сфере (например, в математической лингвистике). С середины XIX в. его стали использовать для анализа самой математики (например, в математической логике). При этом, сама математика и ее символика достаточно редко в наши дни становятся предметом концептуального (т.е. не математического) анализа.

Правда, в XIX веке, в рамках господствовавшего тогда психологизма, такие рассмотрения не были редкостью. Психологизм наложил отпечаток и на «Философию арифметики» Э. Гуссерля (по-русски см. изложение некоторых идей этой работы в [Молчанов, XXXII-XLIII]), занявшего в дальнейшем антипсихологистские позиции, и на философские концепции математики многих других авторов. Например, Г.Л. Гельмгольц, один из основных представителей психологической теории чисел, господствовавшей в 70-80-е гг. XIX в., так писал о своем понимании математики: «Я рассматриваю арифметику или учение об отвлеченных числах, как основанную на чисто психологических фактах методу, которая учит последовательному употреблению системы знаков (именно чисел),…» [Гельмгольц, 5]. Интересно, что в то время семиотическая и психологическая трактовки математического знания были, фактически, неразличимы.

Психологическое понимание семиотики остается и у одного из ее создателей – Ф. де Соссюра: «Можно, таким образом, мыслить себе науку, изучающую жизнь знаков внутри жизни общества; такая наука явилась бы частью социальной психологии, а следовательно и общей психологии; мы назвали бы ее «семиология» (от греч. sēmeîon, знак)» [Соссюр, 21]. По поводу соотношения семиотики (термин был введен другим создателем этой науки – Ч.С. Пирсом) и лингвистики Соссюр считал, что: «Лингвистика только часть этой общей науки; законы, которые откроет семиология, будут применимы и к лингвистике...» [Соссюр, 21]. В XX в. произошла депсихологизация гуманитарных наук, в том числе логики, лингвистики и семиотики. Но семиотика снова оказалась редуцированной, на этот раз к лингвистике: «... Барт перевернул соссюровское определение, трактуя семиологию как некую транслингвистику, которая изучает все знаковые системы, как сводимые к законам языка» [Эко, 386]. Аналогичное мнение о соотношении семиотики и лингвистики высказывал и Ю.М. Лотман. Мне кажется, что XX век вполне показал ограниченность и противоестественность трактовок семиотики и как психологической, и как филологической дисциплины (хотя и с теми, и с другими науками семиотика имеет частично пересекающиеся предметные поля). Семиотика имеет все основания оформиться в самостоятельную науку с разветвленной системой семиотических дисциплин. Семиотика имеет столь общий и базовый для гуманитарных наук характер, что является, скорее, некоторой метанаукой и (пока не получила самостоятельного институционального оформления в культуре) ближе к области философии, чем к тем или иным конкретным наукам.

Поскольку «языки» и «тексты» являются основными объектами рассмотрения филологии и лингвистики, то редукция семиотики к этим дисциплинам естественно сопровождается и редукцией любых парадигматических структур к «языкам», а синтагматических – к «текстам». При этом, и сами понятия языка и текста постепенно трансформируются, вызывая все большую путаницу в гуманитарной культуре. Несмотря на это, многие понятия, выработанные лингвистикой, можно и нужно обобщать (или в адаптированном виде переносить) на случаи других семиотических структур. В целом, наиболее взвешенной точкой зрения, на мой взгляд, до сих пор остается мнение де Соссюра: «… язык, самая сложная и самая распространенная из систем выражения, вместе с тем и наиболее характерна из них всех; в этом смысле лингвистика может служить прототипом вообще всей семиологии, хотя язык только одна из многих семиологических систем» [Соссюр, 69].

Одним из важных аргументов, обычно высказываемых в пользу повсеместного использования искусственных символьных языков, является их однозначность. Этот аргумент нуждается в коррекции: конечно, последовательность в использовании автором на протяжении текста (или его заранее оговоренного раздела) принятой нотации является методическим требованием при оформлении математических (в том числе и логических) работ. Важность этого принципа повышается для работ, осуществляемых в рамках формальной методологии. Но обратившись к семиотическому исследованию математического дискурса (особенно математической логики) в целом, мы обнаружим, что даже среди общепринятой (с устоявшейся десигнацией и денотацией) математической символики существуют и альтернативные способы обозначения, и использование отдельных знаков для передачи нескольких математических значений[2] (обычно из разных областей математики). В данной статье делается попытка адаптировать и применить к анализу математической символики такие лингвистические представления как синонимия, омонимия, полисемия, антонимия, конверсия. Некоторые сложности, возникавшие при этом, связаны со следующими особенностями лингвистики:

1) ориентация лингвистического анализа на звуковую форму, тогда как мы имеем дело с графическими формами;
2) определенная несоразмерность слова (лексемы) как элемента естественной речи и математического знака как элемента «речи» символьно-математической;
3) а также некоторая непоследовательность в определении и применении указанных понятий.

Тем не менее, расширение указанных лингвистических понятий на анализ математической символики кажется вполне естественным и эвристически оправданным.

2. Синонимия

Синонимия *– тип семантических отношений языковых единиц, заключающийся в полном или частичном совпадении их (языковых) значений* [ЛЭС, 446]. В зависимости от типа синонимичных языковых единиц выделяют лексическую, грамматическую и

[2] Здесь и далее, слово «значение» употребляется в лингвистическом смысле, логическое понимание термина передается словом «денотат».

другие виды синонимии. Для анализа математических обозначений можно выделить символьную (аналог лексической) и синтаксическую (аналог грамматической) синонимии. ***Символьная синонимия*** – использование для обозначения одинаковых математических объектов разных графем и их сочетаний. Примерами этого вида синонимии могут служить обозначение умножения знаками «×» и «·» и обозначение деления знаками «:» и «/». ***Синтаксическая синонимия*** – использование для обозначения (построения) «тождественных» математических объектов разных по синтаксису (пространственному сочетанию) комбинаций знаков. При синтаксической синонимии может сохраняться *общий линейный порядок* записи, как, например, в польской символике (рассматривается ниже), или использоваться *сочетание линейного и вертикального расположения* частей сложного выражения. Примером такой синтаксической синонимии (с одновременной символьной синонимией) могут служить такие обозначения деления как: «:» или «/» (с расположением числителя до, а знаменателя после знаков) и «—» (с расположением числителя над, а знаменателя под горизонтальной чертой). В нижеследующих рассмотрениях основное внимание уделяется символьной синонимии, а синтаксическая рассматривается только в связи с первой, поскольку синтаксическая синонимия обычно сопровождается синонимией символьной (***символьно-синтаксическая синонимия***).

Наибольшее число примеров синонимии можно найти в логике. Ниже приводится таблица синонимов для логических связок и кванторов. Символы разнесены по разным колонкам для удобства комментирования.

№		**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
1.	Конъюнкция	&, $\wedge$	$\cdot$, *min*		K
2.	Дизъюнкция	$\vee$, +	*max*		A
3.	Импликация	$\supset$, $\rightarrow$, $\Rightarrow$		$\supseteq$	C
4.	Эквивалентность	$\equiv$, $\leftrightarrow$, $\rightleftarrows$, $\Leftrightarrow$, ~			E
5.	Отрицание	$\neg$, ~	$\overline{}$	–	N
6.	Строгая дизъюнкция	$\underline{\vee}$, $\oplus$, +, $\vee$		Δ	
7.	Стрелка Пирса	$\downarrow$		$\circ$, $\overline{\triangledown}$	
8.	Квантор общности	$\forall$	( )		$\prod$
9.	Квантор существования	$\exists$			$\sum$

- В колонке №4 приводится так называемая польская символика. ***Польская символика*** – *бесскобочный способ записи, при котором функторы ставятся перед своими аргументами*; разработан и введен в 1929 г. Я. Лукасевичем [Лукасевич, 128]. Пропозициональные связки (функторы) K, A, C, E являются примерами символьно-синтаксической синонимии относительно других способов обозначения этих же связок. Лукасевич в указанной работе, чтобы избежать совпадений с силлогистическими предикаторами «A» и «E», вместо пропозициональной связки A использует H, вместо E – J.
- В колонке №3 приводится редкие обозначения, которые автору данной статьи в логической литературе не встречались и взяты из [Бронштейн, Семендяев, 377].
- В колонке №2 приводятся некоторые способы обозначения, нуждающиеся в дополнительном комментарии.
    1. При обозначении конъюнкции точкой (как это часто бывает при использовании точки), ее иногда опускают, тогда операция обозначается самим фактом конкатенации, рядоположения двух хорошо различаемых

выражений.

2. Обозначение конъюнкции и дизъюнкции функторами *min* и *max* дает пример символьно-синтаксической синонимии, как с польским, так и с остальными способами обозначения.
3. Способ обозначения отрицания чертой над отрицаемым выражением является примером символьно-синтаксической синонимии (с линейно-вертикальным расположением) относительно всех других приведенных в таблице способов обозначения.
4. Обозначение квантора общности взятием связываемой переменной в круглые скобки применялось Пеано, Расселом, Гильбертом; пример символьно-синтаксической синонимии, как с обычным, так и с польским способами обозначения.

- В колонке №1 приводятся остальные, достаточно распространенные способы обозначения связок и кванторов.

Приведенный список синонимов, безусловно, не полон. Обращение к той или иной более узкой области математики и логики может существенно пополнить список примеров. Например, в Московской силлогистической школе (В.А. Смирнов, В.А. Бочаров, В.И. Маркин, Т.А. Шиян и др.) используются два устоявшихся стиля представления элементарных силлогистических высказываний, дающих пример символьно-синтаксической синонимии. Атрибутивные высказывания с терминами S и P в стиле В.А. Смирнова будут иметь вид ASP, ISP, ESP, OSP, TSP (высказывание «васильевского» типа «Только некоторые S есть P»), а в получившем ныне преобладание стиле В.И. Маркина – SaP, SiP, SeP, SoP, StP.

Различные примеры ***точной*** и ***неточной*** символьной синонимии дают скобки (как парные (открывающая и закрывающая): круглые, угловые, квадратные, фигурные, так и непарные: косые (широко использовались в эпоху машинописи), прямые). Помимо использования знаков скобок в качестве маркеров начала и конца некоторого выражения, большинство из них еще и используется для обозначения различных функций (одновременно с маркировкой начала и конца аргументного ряда). Например, при обозначении кортежей (упорядоченных множеств) точными синонимами являются альтернативные обозначения начала списка элементов кортежа «<» и «(» и, аналогично, обозначения конца списка: «>» и «)».

В некоторых ситуациях синонимия может представлять определенную проблему. Так, в рамках формальной методологии (и идеологии) «… во внимание должны приниматься только вид и порядок символов, к последовательностям которых применяются правила вывода, но никак, например, не «значения» этих символов» [Френкель, Бар-Хиллер, 319]. Для этого «достаточно было бы самого минимума интуиции, так называемой «глобальной интуиции», нужной для умения решить, совпадают ли два рассматриваемых символа или нет» [Френкель, Бар-Хиллер, 319]. Когда мы работаем с одним текстом, то проблем вроде бы не возникает. Но, если необходимо сравнить результаты, описанные в разных текстах и относящиеся вроде бы к одной и той же теории, то при точном соблюдении формальной методологии могут возникать курьезы. Например, поскольку «&» и «∧» – разные знаки (денотатом термина «амперсант» является знак «&», но никак не знак «∧»), то две формулировки классической логики высказываний в алфавитах $<\wp; \neg, \wedge>$ и $<\wp; \neg, \&>$ ($\wp$ – некоторое множество пропозициональных символов) не будут иметь ни одной общей теоремы. Более подробно возникающие в связи с этим проблемы рассматриваются в работе автора «О некоторых проблемах интерпретации логико-математической символики» [Шиян, 223-230]. Вследствие существования синонимии (а также омонимии и полисемии) формальная методология применима только в определенных четко очерченных пределах (автор называет их ***формальным контекстом***), обычно совпадающих с границами текста. Выход за эти границы требует перехода к другим принципам работы, использования другой методологии. Таким образом, рассматриваемые явления ставят еще одну преграду (в добавление к так называемым ограничительным теоремам) на пути принятия формальной идеологии.

3. Полисемия и омонимия

Полисемия (многозначность) – *наличие у языковой единицы более одного значения* [ЛЭС, 382]. ***Омонимия*** – *совпадение по форме* (в лингвистике – звуковой) *различных языковых единиц, значения которых не связаны друг с другом* [ЛЭС, 344–345]. Омонимия может возникать как в силу случайного совпадения по форме независимо происходящих единиц, так и в результате распада полисемии. В силу этого, разделение случаев полисемии и омонимии не всегда очевидно и иногда может составлять лингвистическую проблему. Два графически идентичных обозначения будем считать омонимами, если между введением этих обозначений не прослеживается семантическая преемственность. Примером омонимии является, на мой взгляд, использование прямых скобок «| |», которые обозначают:

- в теории чисел – взятие действительного числа по модулю, абсолютная величина действительного числа;
- в теории множеств – мощность множества, кардинальное число множества;
- в логике – истинностное значение формулы.

Полисемией будем считать случаи, когда налицо факт переноса значений. Например, в случае со знаками аддитивной «+» и мультипликативной «·» алгебраических операций.

1. Знаком «+» обозначается:

- в теории чисел – сложение;
- в логике (редко) – дизъюнкция.

2. Знаком «·» обозначается:

- в теории чисел – умножение;
- в логике (редко) – конъюнкция.

В обоих случаях имеется перенос значений через абстрагирование (операция алгебры чисел $\to$ операция абстрактной алгебры) и конкретизацию (операция абстрактной алгебры $\to$ операция алгебры логики).

Многозначность плюса на этом не заканчивается. Как видно из списка синонимичных логических символов, знаки «+» и «$\vee$» используются для обозначения как обычной, так и строгой дизъюнкции. Здесь, мне кажется, источником полисемии явилось само слово «дизъюнкция», поскольку рассматриваемые значки понимались не как знаки конкретных логико-математических операций, а как формальные аналоги этого слова.

Мне представляется, что это, вообще, один из типичных для математики путей сохранения полисемии, когда передача одним знаком разных значений консервируется наличием для этих значений некоторого общего, или родового, термина. Тогда источником многозначности выступают конкретные математические (в том числе и формальные) исследования и построения, а приданию и сохранению смыслового единства служит вербализация их некоторым общим термином (выражением). Обозначу такую ситуацию (за неимением более удачного выражения) термином ***родовая полисемия***.

Еще один пример родовой полисемии дает силлогистика. Многозначность основных силлогистических «связок» порождала на протяжении веков многочисленные споры и привела к возникновению ряда альтернативных силлогистических концепций. Эта многозначность передалась и современной формальной силлогистике, поскольку формализация пошла по пути символизации лингвистических выражений, а не по пути передачи разных пониманий тех или иных типов силлогистических высказываний. Собственно, само понимание возможности разных альтернативных интерпретаций возникло уже в символический период. Ниже в таблице приводятся четыре основных типа силлогистических высказываний и экспликация их понимания в основных силлогистических концепциях (по [Маркин]). Традиционная силлогистика (в Новое Время фигурировала под названием «аристотелевской», см., например, [Бочаров; Маркин]) не указана в таблице, поскольку в обычном ее понимании все термины считаются непустыми, а при этом условии все перечисленные в таблице альтернативные понимания совпадают между собой. Обычно в традиционной силлогистике для высказываний принимается фундаментальная интерпретация (плюс требование непустоты объема терминов).

основные типы силлогистических высказываний		**фундаментальная интерпретация** (Лейбниц, Брентано, Гильберт и др.)	**интерпретация Оккама** (и, видимо, Аристотеля)	**интерпретация Больцано**	**интерпретация Льюиса Кэрролла**
Все S есть P	**SaP**	$S \subseteq P$	$S \subseteq P \ \& \ S \neq \varnothing$	$S \subseteq P \ \& \ S \neq \varnothing$	$S \subseteq P \ \& \ S \neq \varnothing$
Некоторые S есть P	**SiP**	$S \cap P \neq \varnothing$	$S \cap P \neq \varnothing$	$S \cap P \neq \varnothing$	$S \cap P \neq \varnothing$
Все S не есть P	**SeP**	$S \cap P = \varnothing$	$S \cap P = \varnothing$	$S \cap P = \varnothing \ \& \ S \neq \varnothing$	$S \cap P = \varnothing$
Некоторые S не есть P	**SoP**	$S \setminus P \neq \varnothing$	$S \setminus P \neq \varnothing \vee S = \varnothing$	$S \setminus P \neq \varnothing$	$S \setminus P \neq \varnothing$

Рассматривая в рамках одного формального языка несколько дедуктивно не эквивалентных исчислений или формальных теорий, мы сталкиваемся также с характерным для математики вариантом полисемии, который можно назвать ***формальной полисемией***. Явления неформальной, или собственно полисемии, омонимии, синонимии могут возникать только с обозначениями, имеющими устоявшуюся десигнацию и получившими в математическом дискурсе существование и смысл, относительно независимые от тех или иных формальных контекстов. Используя такие знаки в формальных построениях, обычно неявно учитывают их устоявшийся содержательный смысл. С другой стороны, те формальные смыслы, которые часто приписываются знакам в рамках формальных построений, могут оказывать влияние и на их содержательное понимание вне формальных контекстов. На мой взгляд, формальная и родовая полисемии тесно связаны: ситуация формальной полисемии указывает на один из механизмов возникновения многозначности в современной математике, а ситуация родовой полисемии – на механизм стабилизации и сохранения уже возникшей многозначности.

Очагами разветвленной, постоянно разрастающейся полисемии (во многом также родовой и формальной одновременно) являются логические связки и их понимание в неклассических логиках. В этой области идет постоянный переход формальной полисемии в содержательную (в полисемию «родового» термина), а употребление единого термина («отрицание», «импликация», «конъюнкция», «дизъюнкция» и т.п.) тормозит дифференциацию символики под разные понимания базовых логических связок. Поскольку основная критика в XX в. пришлась на долю классического понимания импликации и отрицания, то с употреблением именно этих связок связана наибольшая многозначность. Новые понимания отрицания, импликации и других связок формировались за счет отказа от тех или иных классических законов или за счет расширения определений логических связок на новые (неклассические) логические значения. Оба пути оказались эквивалентными по результату. В итоге, одни и те же символы, понимаемые как «отрицание», «импликация» и т.д., оказались носителями различных формальных, функциональных, семантических свойств. В связи с этим встает вопрос, являются ли операции, кодируемые в тех или иных формализмах некоторым символом (отрицания, импликации и т.п.), в действительности разными вариантами операций отрицания, импликации и т.п. или же это совершенно разные операции, и трактовка их как отрицания, импликации и т.п. уже не правомерна. Например, в связи с так называемой паранепротиворечивой логикой существует как внешняя, так и внутренняя критика трактовки паранепротиворечивого «отрицания» как отрицания. Например, если формула и ее «отрицание» находятся в отношении не контрадикторности, а контрарности (как в силлогистиках Н.А. Васильева) или даже субконтрарности, то можно ли здесь говорить об отрицании, противоречии и тому подобных понятиях? Возможно, что в связи со многими неклассическими логиками слова «отрицание», «импликация» и их символические обозначения являются уже не многозначными знаками, а омонимами?

Рост полисемии и омонимии логических знаков ограничивается постепенным распадением единой нотации и закреплением за теми или иными синонимичными значками своих собственных относительно постоянных значений, т.е. за счет перехода точной синонимии в частичную. При этом, фактором синонимии (наличия общей части смыслового значения) служит словесное обозначение синонимов общим термином. По аналогии с «родовой полисемией» этот случай можно назвать ***родовой (частичной) синонимией***. Рассмотрим пример с термином «импликация», наиболее устойчивыми способами обозначения которой являются следующие:

- $\supset$ – материальная (классическая) импликация;
- $\prec$ – строгая импликация (Льюис);
- $\rightarrow$ – любые варианты импликации в формальных (объектных) языках, но преимущественно неклассические;
- $\Rightarrow$ – метаимпликация (понимается классически).

Другим примером полисемии может служить использование скобок как в качестве собственно скобок (маркеров начала и конца некоторого выражения), так и для обозначения различных функций:

{ } – неупорядоченные множества;

< >, ( ) – кортежи, или упорядоченные множества;

[ ], ( ),] [и др. – интервалы.

В заключение, рассмотрим несколько сложных случаев, нуждающихся в дальнейших исследованиях.

Кажется, что одна из возможных тенденций развития полисемии связана со стремлением к разделению объектного и метаязыка. В рамках формальных исследований избегают многозначности за счет использования синонимичных или модифицированных обозначений для знаков метаязыка. Но в независимом от формальных контекстов (интерконтекстуальном) существовании логических знаков такое возможное их использование как знаков объектного языка (с формально определенным смыслом) и как знаков метаязыка (с содержательно понимаемым смыслом) думаю, что можно трактовать как некоторый вариант слабой полисемии. По крайней мере, этот момент требует более детального анализа. Впрочем, в функционировании логической символики наблюдается и некоторое дифференцирование в употреблении синонимов. Например, «$\Rightarrow$» и «$\Leftrightarrow$» употребляются как содержательно понимаемые знаки математического языка, а знаки «$\supset$», «$\rightarrow$», «$\equiv$», «$\leftrightarrow$» и т.д. – как формально определяемые знаки объектных языков.

Другой сложный случай представляет собой использование в логической семантике цифр «1» и «0» (в многозначных логиках также и других цифр). Поскольку они используются для обозначения некоторых истинностных значений, а не чисел, то можно говорить о других, не числовых значениях цифр (или даже об омонимии знаков «1» и «0» в этой функции – с цифрами). Возражение такой трактовке обусловлено тем, что этими знаками часто манипулируют так, как если бы они обозначали числа (например, определение операций конъюнкции и дизъюнкции через функции min и max основывается именно на числовой интерпретации истинностных значений). Этот вопрос также требует более детального анализа.

В целом, как было отмечено выше, существование синонимии, омонимии и полисемии создает существенные проблемы в применении формальной методологии. Приведу один пример из современного логического дискурса. В работах В.А. Смирнова [Смирнов], Л.И. Мчедлишвили [Мчедлишвили] и В.И. Маркина [Маркин] рассматривается ряд силлогистических теорий в языке с простыми общими терминами и четырьмя классическими силлогистическими связками. Хотя содержательно подразумевается, что эти теории построены в одном и том же языке, но указанные авторы использовали в этих работах разные нотации (разные алфавиты и несколько различный синтаксис). Так, например, общеутвердительное высказывание у Смирнова может представляться последовательностью вида «ASP», у Маркина – «SaP», а у Мчедлишвили – «AaB». Таким образом, исходя из подразумеваемого единства объектного языка, содержательных соображений и целей исследования, мы должны «A» в «ASP» отождествить с «a» в «SaP», но различить с «A» в «AaB». Или, в терминологии настоящей статьи, «A» в «ASP» и «a» в «SaP» являются формальными синонимами, а «A» в «ASP» и «A» в «AaB» – формальными омонимами.

4. Антонимия

Антонимия *– тип семантических отношений лексических единиц, имеющих противоположные* (в определенном смысле) *значения* [ЛЭС, 35]. Вопросы антонимии математических обозначений являются, на мой взгляд, наиболее сложными и неоднозначными из всех рассматривающихся в статье. Это связано как с запутанностью лингвистической теории антонимии, так и с неоднозначностью понимания для двух противопоставленных по некоторому признаку значений имеем ли мы дело с какой-либо противоположностью (пусть в некотором не логическом смысле) этих значений или же можно говорить только о разных, но связанных значениях. В некоторых случаях можно говорить о синонимии двух знаков по одной группе признаков и антонимии по некоторому другому признаку. Например, в случае с обозначением начала открытого «(» и закрытого «[» числового интервала знаки «(» и «[» можно считать синонимами по признаку начала интервала и антонимами – по признаку открытости/закрытости интервала.

Противопоставляемые математические выражения можно разделить по нескольким основаниям.

Семиотически можно выделить, по крайней мере, четыре группы противопоставляемых выражений, в зависимости от того, противопоставляются ли отдельные символы (или группы знаков, функционирующие в математике как единое целое, например: «sin», «ln» и т.п.), сложные несамостоятельные выражения (знаки функций, отношений и т.п.), термы или формулы. В лингвистике антонимия рассматривается только как лексическое отношение и, соответственно, предложения (и, если не все, то большинство сложных термов) с противоположным смыслом не подпадают под понятие антонимии. В математике (хотя мы и придерживаемся общей идеи, что математические символы являются аналогами лексем обычных языков) дело осложняется тем, что некоторые элементарные термы могут состоять из нескольких символов (например, цифры), а один символ может обозначать целое предложение (например, знаки для тождественно ложных и тождественно истинных предложений в логике). Если следовать лингвистической установке рассматривать только лексическую антонимию, то в поле нашего анализа попадают математические символы (кроме обозначающих целые предложения), простые термы и сложные несамостоятельные выражения, используемые для обозначения функций, отношений и т.п.

Синтаксически, по типу образования, антонимические пары можно разделить на образующиеся (1) заменой одного символа на другой (***символьная антонимия***), (2) изменением синтаксической структуры (порядка символов) антонимичных выражений (***синтаксическая антонимия***) и (3) добавлением к исходному выражению некоторых дополнительных знаков, или модификатора (***формульная антонимия***).

Семантически, антонимы можно разделить на группы по типу отношения противоположности. Думается, что антонимия в математике связана, в первую очередь, с понятиями дуальности и обратности. Проблема «контрадикторных антонимов» обсуждается ниже отдельно.

Хотя автору не известно примеров чисто синтаксической антонимии (получения антонимов путем изменения порядка используемых символов), но обычно пары противопоставленных значений пытаются обозначать некоторыми схожими способами, что часто можно трактовать как скрытую синтаксическую антонимию. ***Квазисинтаксической антонимией*** буду называть такой случай символьной антонимии, при которой один из антонимичных знаков получается некоторой пространственной трансформацией второго. По типу квазисинтаксической трансформации можно выделить, по крайней мере, две группы таких антонимов. Первую группу образуют антонимы, получаемые переворотом знака вдоль горизонтальной оси: «$\wedge$» и «$\vee$», «$\cup$» и «$\cap$» и т.п. Вторую группу составляют антонимы, получаемые переворотом знака вдоль вертикальной оси. К этой группе относятся все приведенные ниже случаи конверсивных антонимов. Кроме того, примерами антонимов этой группы можно считать парные скобки; противопоставление в этом случае идет по принципу начала или конца внутрискобочного выражения: «(» vs. «)», «<» vs. «>», «[» vs. «]», «{» vs. «}».

Еще одной разновидностью символьной антонимии является ***квазиформульная антонимия***, примером которой служат антонимы, один из которых получается перечеркиванием второго (см. первую группу из рассмотренных ниже контрадикторных антонимов).

Одну из семантических групп составляют антонимы, противопоставленные по принципу «обратности». Большая часть этих антонимов относится к синтаксической группе формульных антонимов: второй знак антонимической пары образуется добавлением к основному знаку оператора обратности «$^{-1}$» (ставится сразу после своего аргумента). Среди антонимов этой группы есть термы (элементарные термы и одиночные символы) и несамостоятельные знаки (функций и отношений). Среди антонимичных термов в особую группу выделяются цифры, обозначающие числа с противоположным знаком (каждому числу ставится в соответствие обратное ему число умножением на –1): «1» и «–1», «2» и «–2», «3» и «–3», и т. д. Рассмотренные ниже конверсивные антонимы являются также и антонимами относительно обратности.

Еще одной группой формульных антонимов будут антонимы, полученные на основе дополнения. Семантически это соответствует так называемым комплементарным антонимам в лингвистике. В лингвистике слова с контрадикторными (противоречащими) значениями обычно не рассматриваются как антонимы [ЛЭС, 36]. С другой стороны, выделяются антонимы так называемого комплементарного типа, например: «истинный» – «ложный», «конечный» – «бесконечный», «можно» – «нельзя»

[ЛЭС, 36]. Поскольку в логике и математике эти слова понимаются как контрадикторные, то думаю, что при анализе математической символики имеет смысл специально рассматривать ***контрадикторную антонимию*** (по крайней мере, для трех первых из выделенных выше семиотических групп выражений).

Первую группу контрадикторных антонимов составляют знаки бинарных отношений, в которых второй знак образован перечеркиванием первого, например:

- $=$ и $\neq$ (равенство – неравенство);
- $\in$ и $\notin$ (принадлежность – непринадлежность элемента множеству);
- $\subset$ и $\not\subset$ (наличие – отсутствие строгого включения).

В качестве еще одной группы контрадикторных антонимов можно указать логические связки, парные относительно отрицания. Часто уже в названиях таких связок имеется указание на контрадикторность по отношению к некоторой другой связке, иногда это выражается и графически. Примерами таких пар являются

- $\equiv$ и $\veebar$ (эквивалентность – строгая дизъюнкция);
- $\vee$ и $\downarrow$ (или $\bar{\vee}$) (дизъюнкция – стрелка Пирса, антидизъюнкция);
- $\wedge$ и $|$ (конъюнкция – штрих Шеффера, антиконъюнкция).

На мой взгляд, контрадикторность подразумевает именно классическое отрицание; «контрадикторные» значения относительно неклассического отрицания, не являются контрадикторными. По крайней мере, по этому вопросу ведутся споры.

Еще одну группу антонимов составляют знаки парных бинарных отношений и логических связок, противопоставленных по лево- и правосторонней направленности. Такие антонимы называются ***конверсивными***. Часто употребляемыми конверсивными антонимами являются:

- $<$ и $>$ (меньше и больше);
- $\leq$ и $\geq$ (меньше или равно и больше или равно).

Редко употребляемыми являются правые варианты следующих пар:

- $\subset$ и $\supset$ (строгое включение);
- $\subseteq$ и $\supseteq$ (не строгое включение);

для импликации:

- $\rightarrow$ и $\leftarrow$;
- $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$.

В логике для метаотношений выводимости «|–» и логического следования «|=» иногда (на уровне профессионального сленга) используются производные отношения, также дающие примеры конверсивных антонимов: «–|» и «=|».

Вопросы конверсии в целом обсуждаются в следующем параграфе.

5. Конверсия

В лингвистике ***конверсией*** *называется способ (грамматический или лексический) выражения отношений в эквивалентных по смыслу предложениях с перестановкой субъекта и предиката* [ЛЭС, 234]. Среди лексических (применительно к математической символике – символьных) конверсивов выделяют два вида. ***Конверсивы без коррелятов*** – слова, симметричные (в математическом смысле) относительно конверсии, т.е. выражающие конверсные отношения как в исходном, так и в обращенном предложении. ***Антонимичные конверсивы*** – пары антонимов, переходящих друг в друга при конверсии. Соответственно, применительно к математической символике конверсия сводится к вопросам симметрии бинарных отношений. Знаки симметричных отношений будут ***(символьными) конверсивами без коррелятов***, например:

- $=$ – отношение равенства;

- ≠ – отношение неравенства;
- ≈ – отношение толерантности.

В логике иногда употребляются метаотношения:

- –||– (эквивалентность относительно выводимости);
- =||= (эквивалентность относительно логического следования).

С другой стороны, ***антонимичными (символьными) конверсивами*** будут знаки несимметричных (асимметричных и антисимметричных) отношений, парных относительно лево- и правосторонней направленности (приведены в конце предыдущего параграфа).

Дополнительного рассмотрения требует трактовка логических связок как конверсивов. С точки зрения лингвистической теории конверсии, конверсивами являются парные (по лево- и правосторонней направленности) знаки бинарных отношений. С другой стороны, с точки зрения теории антонимии, является разумным называть конверсивами не только знаки отношений, но и аналогичные пары логических связок, и, если бы такие были, пары знаков некоммутативных бинарных функций. Такое расширение (применительно к математической символике) понятия конверсивов кажется вполне естественным и удобным.

Особенно естественно такой перенос осуществляется на те логические связки, которые тесно связаны с определенными логическими отношениями (рассматривавшиеся выше метаотношения выводимости и логического следования). В этом случае, помимо приводившихся выше антонимичных конверсивов, можно указать и конверсивы без коррелятов, которыми будут различные обозначения для эквивалентности: ↔, ⇔, ≡, ⇄ и другие.

По крайней мере с этой точки зрения, понятия антонимии и конверсии требуют дополнительного анализа. В качестве одного из решений можно принять лингвистическое разделение терминов. Например, термин «конверсивные антонимы» использовать в более широком смысле, для обозначения соответствующих пар знаков любых семиотических категорий. А термин «антонимичные конверсивы» использовать для обозначения только пар бинарных отношений.

6. Заключение

Из поднятых в работе тем, мне кажутся нуждающимися в дальнейшей проработке, по крайней мере, следующие:

1) явления одновременной синонимичности и антонимичности некоторых знаков;
2) семиотическая роль скобок и соотношение некоторых случаев парных скобок с точки зрения синонимии/антонимии;
3) понятие антонимии в связи с противоположностью, отрицанием (в том числе и неклассическим), понятиями дуальности, дополнительности и т.п.;
4) различные вопросы денотации цифр, в частности, в связи с позиционными системами счета и в связи с использованием цифр в качестве символов логических значений.

В заключение укажу на некоторые вопросы и проблемы, возникающие в формальной методологии в связи с синонимией, омонимией и полисемией. Как было указано выше, наличие в математическом дискурсе синонимичных, омонимичных и полисемичных символьных обозначений приводит к существенному сокращению области применимости формальной методологии. Математические рассуждения, при которых во внимание принимаются «только вид и порядок символов» [Френкель, Бар-Хиллер, 319], корректно осуществимы только внутри определенных контекстов, названных выше формальными. Но обычная процедура: обзор полученных другими авторами результатов, – ставит проблему (как правило, не замечаемую) соотнесения формальных построений из разных формальных контекстов (***интерконтекстуальное*** сравнение, соотнесение и т.п.). Выход за пределы этих контекстов требует учета не столько вида и порядка, сколько ««значения» этих символов» [Френкель, Бар-Хиллер, 319], поскольку в другом формальном контексте для передачи тех же смысловых значений могут использоваться другие символы, а некоторые символы из первого контекста могут использоваться в других значениях.

Возникающую при интерконтекстуальных сравнениях проблему можно сформулировать так: *каковы основания проводимого при сравнении формализмов отождествления/различения тех или иных формальных конструкций?* На практике, задача соотнесения контекстов всегда как-то решается. Причем, без всякой тематизации, а тем более проблематизации осуществляемых при этом действий. Проведенный автором анализ факторов (см. [Шиян]), которые явно или неявно учитываются при интерконтекстуальном сравнении формальных построений, показывает, что производимые при этом смысловые действия никак не сводятся к учету *только вида и порядка символов*, но включают учет различных смысловых уровней *«значения» этих символов*, а также учет существующей в научной культуре традиции отождествления/различения символики и учет *ad hoc* различных случайных факторов. В результате такого интерконтекстуального сравнения могут быть получены разные системы соотнесения (отождествления/различения) символов и правильно построенных выражений. Вывод, к которому приходит автор, можно сформулировать так: *не существует конечного числа формальных, нормативных критериев, которых было бы достаточно для решения задачи интерконтекстуального сравнения формализмов в любой возможной будущей ситуации.* Иными словами, методика интерконтекстуального сравнения не формализуема, хотя мы всегда можем *ad hoc* формализовать результаты такого сравнения (в виде некоторого отношения или отображения).

Литература

1. *Бочаров В.А.* Аристотель и традиционная силлогистика. М., 1984.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М., 1986.
3. Башмакова И.Г., Колмогоров А.Н. Юшкевич А.П. Математические знаки // Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М., 1995. (Та же статья, но без указания авторства: Знаки математические // Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 2. М., 1979. С. 458-463.)
4. ЛЭС, Лингвистический энциклопедический словарь. М., 1990.
5. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. Биробиджан, 2000.
6. *Маркин В.И.* Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
7. *Молчанов В.* Аналитическая феноменология в Логических исследованиях Эдмунда Гуссерля // Гуссерль Эд. Собрание сочинений. Т. 3 (1). Логические исследования. Т. II (1) / Пер. В.И. Молчанова. М., 2001. С. XIII-CVII.
8. *Мчедлишвили Л.И.* Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.
9. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М., 1987.
10. *Соссюр, Ф. де.* Курс общей лингвистики / Пер. с фр. А.М. Сухотина; науч. ред. Н.А. Слюсаревой. М.: Изд. “Логос”, 1998.
11. *Фон-Гельмгольц Г.* Счет и измерение // «Счет и измерение» Г. Фон-Гельмгольца. «Понятие о числе» Л. Кронекера. Пер. А. Васильева. Казань, 1983.

12. *Френкель А.А.*, *Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1966.
13. *Шиян Т.А.* О некоторых проблемах интерпретации логико-математической символики // Δόξα / Докса. Збірник наукових праць з філософії та філології. Вип. 10. Стратегії інтерпретації тексту: методи і межі їх застосування. Одеса, 2006. С. 223-230.
14. *Эко У.* Отсутствующая структура. Введение в семиологию. СПб., 1998.