

Формально-историческое исследование нескольких групп формальных силлогистик^{1, 2}

Шиян Т.А. Формально-историческое исследование нескольких групп формальных силлогистик // Электронный журнал *Logical Studies*. №10 (2003). www.logic.ru.

Шиян Т.А. Формально-историческое исследование нескольких групп формальных силлогистик // Логика и В.Е.К. К 90-летию профессора Войшвилло Евгения Казимировича. М.: Изд-во «Современные тетради», 2003.

Сохранено с сайта: <http://taras-shiyan.narod.ru>.

E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

Abstract. *The work proceeds with the series of formal-historical investigations of formal theories, described in Russian scientific literature (see the papers of the author in the journal, №4 and №8). In the paper, the author studies relations (by sets of theorems) between 37 formal syllogistics, formulated in 13 different formal languages. The results of the investigations are presented in the form of graphs (Hasse diagrams).*

1. Вводные замечания

За последние 20 лет в русскоязычной литературе описано более 60-ти различных формальных силлогистик, сформулированных как минимум в двух десятках языков. Число различных исчислений, чья дедуктивная эквивалентность отнюдь не очевидна, видимо, приближается к сотне. Возникает задача эффективной ориентации в материале. В данной статье я приведу результаты исследований соотношения формальных силлогистик по дедуктивной силе (по множеству теорем). При этом, я существенным образом буду опираться на ранее опубликованные мной результаты в области сравнения формальных силлогистик: [Шиян 2000], [Шиян 2002а], [Шиян 2002б].

Под формальной теорией я буду понимать множество формул некоторого формального языка, замкнутое относительно некоторых правил вывода. Если некоторое множество формул рассматривается как формальная теория, то его элементы называются теоремами данной теории. На формальных силлогистиках задается отношение порядка, соответствующее включению формальных теорий друг в друга. При этом считается, что мы умеем правильно отождествлять/различать символы и выражения разных языков. Результаты сравнения формальных теорий я буду представлять с помощью направленных графов (диаграмм Хассе). Направление связей в графе идет от меньшей теории к большей. Для простоты восприятия стрелки обычно опускаются, и связи считаются направленными снизу вверх.

2. Соотношение силлогистических языков

В данной статье рассматриваются теории, сформулированные на базе классической логики высказываний (КЛВ) в языках без кванторов и модальных операторов. Все рассматриваемые языки включают:

- а) логические константы: \neg , \wedge , \vee , \supset , \equiv ;
- б) конечный список предикаторов (понимаемых как силлогистические константы);

¹ Работа выполнена при частичной поддержке РГНФ, грант №03-03-12003в.

² © Шиян Т.А., 2003.

- с) бесконечный список $\{S, P, M, S_1, P_1, M_1, \dots\}$ элементарных постоянных термов, понимаемых как общие термины, и, возможно, еще один бесконечный список элементарных постоянных термов, понимаемых как единичные термины;
- д) конечный список функторов (возможно, пустой);
- е) круглые скобки.

Различия между языками – в списках дескриптивных терминов (предикаторов, функторов и наличии «единичных» термов), иногда в грамматике. Определение правильно построенной формулы (ППФ) строится обычным образом:

- а) определение элементарной формулы (если не оговорено иное, то элементарная формула – выражение типа $t_1 * t_2$, где t_1 и t_2 – термы и $*$ – двухместный предикатор);
- б) правила построения из одних ППФ при помощи логических связок других ППФ.

Ниже приводится список формальных силлогистических языков, в которых сформулированы описываемые ниже теории, и диаграмма Хассе для них. Отношение порядка задается включением по множеству ППФ. Пунктирная линия на графе показывает, что она проходит «через третье измерение» и не пересекается с линией SL – SL_{sa} . Данная система объектов может быть представлена планарным графом, но он менее выразителен.

Язык SL чистой позитивной силлогистики [Маркин 1991, с. 18] содержит список $\{a, e, i, o\}$ двухместных предикаторов.

Язык $SL_{a,i}$ чистой позитивной силлогистики с утвердительными силлогистическими константами [Смирнов 2001, с. 169], [Смирнов 2002, с. 178] содержит список $\{a, i\}$ двухместных предикаторов.

Язык $N^1SL_{a,i,e}$ чистой негативной силлогистики [Ильин 2002b] содержит список $\{a, e, i\}$ двухместных предикаторов и одноместный функтор $\{'\}$.

Термы: (1) элементарные термы; (2) выражения вида t' , где t – элементарный терм.

Язык $NSL_{a,i,e}$ чистой негативной силлогистики содержит список $\{a, e, i\}$ двухместных предикаторов и одноместный функтор $\{'\}$.

Термы: (1) элементарные термы; (2) выражения вида t' , где t – терм.

Язык NSL чистой негативной силлогистики [Ильин 2000] содержит список $\{a, e, i, o\}$ двухместных предикаторов и одноместный функтор $\{'\}$.

Термы: (1) элементарные термы; (2) выражения вида t' , где t – терм.

Язык DSL расширенной силлогистики [Смирнов 1983а; 1993, с. 18] и [Маркин 1991, с. 89] содержит список $\{a, e, i, o\}$ двухместных предикаторов, $\{'\}$ – одноместный и $\{\cap, \cup\}$ – двухместные функторы.

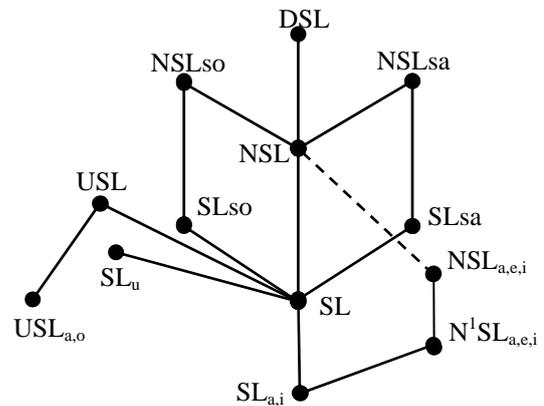
Термы: (1) элементарные термы; (2) выражения вида $t_1', t_1 \cap t_2, t_1 \cup t_2$ где t_1, t_2 – термы.

Язык SL_u обобщенной силлогистики [Маркин 1991, с. 44] содержит списки: $\{a, e, i, o\}$ – двухместных и $\{u\}$ – одноместных предикаторов.

Элементарная формула – выражение типа $t_1 * t_2$ или типа ut_1 , где t_1 и t_2 – термы и $*$ – двухместный предикатор.

Язык USL обобщенной силлогистики [Ганиянц, Маркин 1997], [Маркин 1998а, с. 109; 1999, с. 243] содержит список $\{a, e, i, o, u, q\}$ двухместных предикаторов.

Язык $USL_{a,o}$ обобщенной силлогистики [Ганиянц, Маркин 1997] (подъязык USL)



Граф 1. Силлогистические языки.

содержит список $\{a, o, u, q\}$ двухместных предикаторов.

Язык SL_{so} сингулярной позитивной силлогистики оккамовского типа [Маркин 1991, с. 67] содержит список $\{a, e, i, o\}$ двухместных предикаторов и бесконечный список $\{v, w, v_1, w_1, \dots\}$ постоянных термов (параметров), понимаемых как единичные термины.

Язык NSL_{so} сингулярной негативной силлогистики оккамовского типа [Маркин 1991, с. 83] содержит список $\{a, e, i, o\}$ двухместных предикаторов, бесконечный список $\{v, w, v_1, w_1, \dots\}$ постоянных термов (параметров), понимаемых как единичные термины, и $\{'\}$ – одноместный функтор.

Термы: (1) элементарные термы; (2) выражения вида t' , где t – терм.

Язык SL_{sa} сингулярной позитивной силлогистики аристотелевского типа [Маркин 1991, с. 57] содержит список $\{a, e, i, o, j, y\}$ двухместных предикаторов и бесконечный список $\{v, w, v_1, w_1, \dots\}$ постоянных термов (параметров), понимаемых как единичные термины.

Элементарная формула – выражение типа $t_1 * t_2$, где t_1 и t_2 – «общие» термы и $*$ $\in \{a, e, i, o\}$ или t_1 – «единичный», t_2 – «общий» термы и $*$ $\in \{j, y\}$.

Язык NSL_{sa} сингулярной негативной силлогистики аристотелевского типа [Маркин 1991, с. 77] содержит список $\{a, e, i, o, j, y\}$ двухместных предикаторов, бесконечный список $\{v, w, v_1, w_1, \dots\}$ постоянных термов (параметров), понимаемых как единичные термины, и $\{'\}$ – одноместный функтор.

«Общие» термы: (1) элементарные «общие» термы; (2) выражения вида t' , где t – «общий» терм.

Элементарная формула – выражение типа $t_1 * t_2$, где t_1 и t_2 – «общие» термы и $*$ $\in \{a, e, i, o\}$ или t_1 – «единичный», t_2 – «общий» термы и $*$ $\in \{j, y\}$.

Теорема 2.1. $NSL_{sa} \cap NSL_{so} = NSL$.

1. $NSL \subseteq NSL_{sa}$ – по построению;
2. $NSL \subseteq NSL_{so}$ – по построению;
3. $NSL \subseteq NSL_{sa} \cap NSL_{so}$ – из 5, 6;
4. Т.к. предикаторы j и y не принадлежат алфавиту языка NSL_{so} , то ни одна формула с сингулярными терминами языка NSL_{sa} не принадлежит NSL_{so} – по построению NSL_{so} и определению ППФ для NSL_{sa} ;
5. $NSL_{sa} \cap NSL_{so} \subseteq NSL$ – из 4 по построению SL_{sa} ;
6. $NSL_{sa} \cap NSL_{so} = NSL$ – из 3 и 5.

Имеют место также следующие теоремы.

Теорема 2.2. $SL_{sa} \cap SL_{so} = SL$.

Теорема 2.3. $SL_{sa} \cap NSL = SL$.

Теорема 2.4. $SL_{so} \cap NSL = SL$.

Теорема 2.5. $NSL_{sa} \cap DSL = NSL$.

Теорема 2.6. $NSL_{so} \cap DSL = NSL$.

3. Чистые позитивные силлогистики в языках SL и $SL_{a,i}$

В [Шиян 2002b] построено структурное описание множества из 30 формальных теорий в языке SL , куда вошли почти все описанные к настоящему времени в русскоязычной литературе силлогистики в языке SL . Описание было представлено в виде диаграммы Хассе. Здесь я упомяну только некоторые из этих теорий, необходимые мне для последующих построений, и несколько теорий, не упомянутых в [Шиян 2002b]. Все теории формулируются на базе КЛВ, замкнуты относительно modus

ропенси и правила подстановки терминов и включают в качестве аксиом формулы, указанные в следующей таблице. Обозначения в таблице: «+» – формула является аксиомой, «|-» – формула является теоремой, «-» – формула не является теоремой теории.

Таблица 1.

Аксиомы	C2.1	Сф2	ИФС	ИС-1	ИС-2	ФС	C1.2	ИС2	C2	КС	БС	C4
$(SaM \wedge MaP) \supset SaP$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$(SaM \wedge MeP) \supset SeP$	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$(SiM \wedge MaP) \supset SiP$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$SiP \supset PiS$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$SaP \supset SiP$	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
$SiP \supset SiS$	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-
$SaP \supset SiS$	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
$SiS \supset SaS$	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$SaP \supset (SaS \wedge PaP)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$SoP \supset SiS$	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	+
$SeP \supset SaS$	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
$SeP \equiv \neg SiP$	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+
$SeP \equiv \neg SiP \wedge SiS$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
$SoP \equiv \neg SaP$	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+
$SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-

- ИС1 – ИФС + $(SoP \supset SiS)$, [Маркин 2002]. В этой статье тоже что ИС-1.
- ИС2:
 1. Вариант аристотелевской силлогистики с интенциональной семантикой, [Маркин 2003].
 2. ИФС + $(SiP \supset SiS)$, [Маркин 2002]. В этой статье тоже что ИС-2.
- ИФС – Вариант фундаментальной силлогистики с интенциональной семантикой, [Маркин 2002].
- ИС-1 – тоже что ИС1.
- ИС-2 – тоже что ИС2 (2).
- C1.2 – C1 + $(SiS \supset SaS)$.
- C2 – C1 + $(SiP \supset SaS)$, реализация чистого позитивного фрагмента силлогистики Аристотеля, [Маркин 1991].
- C2.1 – максимальный фрагмент C2, КС в языке $SL_{a,i}$, [Смирнов 2001, 2002].
- C4 – реализация чистого позитивного фрагмента «традиционной» силлогистики, силлогистика Лукасевича, [Маркин 1991].
- Сф2 – подтеория ФС и C1, [Шиян 2002b].
- БС – реализация чистого позитивного фрагмента силлогистики Больцано, [Маркин 1991].
- КС – реализация чистого позитивного фрагмента силлогистики Льюиса Кэрролла, [Маркин 1991].
- ФС – реализация чистого позитивного фрагмента фундаментальной силлогистики, [Маркин 1991].

Теорема 3.1. $\Phi C, C2, KC, BC \subset C4$, см. [Шиян 2000].

Теорема 3.2. $C\phi 2 \subset C1.2 \subset IC2$ [Маркин 2003] $\subset C2$, см. таблицу 1.

Теорема 3.3. $C\phi 2 \subset ИФC \subset IC-1, IC-2$ [Маркин 2002] $\subset \Phi C$, см. таблицу 1.

Как видно из таблицы, $C2.1$ является подтеорией $C2$ и KC . Следующий вывод имеет место во всех системах из таблицы 1, кроме BC .

Лемма 3.1. $(SaM \wedge MeP) \supset SeP, SeP \equiv \neg SiP, SiP \equiv PiS \vdash (SiM \wedge MaP) \supset SiP$.

1. $(SaM \wedge MeP) \supset SeP$ – аксиома;
2. $(SaM \wedge \neg MiP) \supset \neg SiP$ – из 1, замена на эквивалентное по $SeP \equiv \neg SiP$;
3. $\neg SaM \vee MiP \vee \neg SiP$ – из 2, взаимовыразимость связок;
4. $\neg SaM \vee \neg SiP \vee MiP$ – из 3, коммутативность дизъюнкции;
5. $(SaM \wedge SiP) \supset MiP$ – из 4, взаимовыразимость связок;
6. $(PiS \wedge SaM) \supset PiM$ – из 5, замена на эквивалентное, обращение для I , коммутативность конъюнкции;
7. $(SiM \wedge MaP) \supset SiP$ – из 6, переименование терминов.

Теорема 3.4. $C2.1 \subset C2, KC$.

В формулировках $C2.1, C2$ и KC , описанных в таблице 1, все правила вывода и аксиомы $C2.1$, кроме $(SiM \wedge MaP) \supset SiP$, входят в формулировки $C2$ и KC . $(SiM \wedge MaP) \supset SiP$ доказуема в $C2$ и KC (лемма 3.1). Следовательно, $C2.1$ является подтеорией $C2$ и KC .

В [Смирнов 2002] без доказательства приводится факт, что $C2.1$ может быть дефинициально расширена до $C2$ за счет добавления стандартных определений для E и O : $(SeP \equiv_{df} \neg SiP)$ и $(SoP \equiv_{df} \neg SaP)$. Очевидно, что она аналогично может быть расширена до KC за счет добавления определений $(SeP \equiv_{df} \neg SiP)$ и $(SoP \equiv_{df} \neg SaP \wedge SiS)$.

Лемма 3.2. $(SiM \wedge MaP) \supset SiP, SeP \equiv \neg SiP, SiP \equiv PiS \vdash (SaM \wedge MeP) \supset SeP$.

1. $(SiM \wedge MaP) \supset SiP$ – аксиома;
2. $(\neg SeM \wedge MaP) \supset \neg SeP$ – из 1, замена на эквивалентное по $SeP \equiv \neg SiP$;
3. $SeM \vee \neg MaP \vee \neg SeP$ – из 2, взаимовыразимость связок;
4. $\neg SeP \vee \neg MaP \vee SeM$ – из 3, коммутативность дизъюнкции;
5. $(SeP \wedge MaP) \supset SeM$ – из 4, взаимовыразимость связок;
6. $(MaP \wedge PeS) \supset MeS$ – из 5, замена на эквивалентное, обращение для E , коммутативность конъюнкции;
7. $(SaM \wedge MeP) \supset SeP$ – из 6, переименование терминов.

Теорема 3.5. $C2.1$ дефинициально расширяема до KC и $C2$.

Если расширить язык $C2.1$ предикатами «е» и «о» и добавить указанные определения для E и O как в KC (или как в $C2$), то, как видно из таблицы 1 и леммы 3.1, в полученных теориях доказуемы все теоремы KC (или $C2$). Наоборот, в KC ($C2$) доказуемы все теоремы расширенной $C2.1$. Это видно из таблицы 1 и леммы 3.2. Следовательно, расширение языка до SL и добавление к $C2.1$ первой или второй пары определений дает теории KC или $C2$. Следовательно, $C2.1$ является дефинициально расширяемой до $C2$ и KC и представляет собой точный (максимальный) фрагмент этих теорий в языке $SL_{a,i}$.

Из $C2.1$ можно получить еще две теории, добавив к для E и O определения $(SeP \equiv_{df} \neg SiP \wedge SiS)$ и $(SoP \equiv_{df} \neg SaP \wedge SiS)$ или $(SeP \equiv_{df} \neg SiP \wedge SiS)$ и $(SoP \equiv_{df} \neg SaP)$. Как

соотносится первая из них с теорией БС?

Соотношение по дедуктивной силе формальных теорий из таблицы 1 можно изобразить следующей диаграммой Хассе (граф 2).

4. Обобщенные силлогистики в языках USL, USL_{a,o} и SL_u

В данных языках описаны следующие формальные теории.

- ОС4 – расширение С4 с двухместными силлогистическими константами исчерпываемости и неисчерпываемости универсума объемами терминов, [Маркин 1999]. То же что СУ4 и УС4 в [Ганиянц, Маркин 1997].
- ОФС – расширение ФС:
 1. расширение ФС с одноместной силлогистической константой универсальности, [Маркин 1991].
 2. расширение ФС с двухместными силлогистическими константами исчерпываемости и неисчерпываемости универсума объемами терминов, [Маркин 1998a], [Маркин 1999]. То же самое что ФУС.
- СУ4 – то же что ОС4 и УС4, [Ганиянц, Маркин 1997].
- УС4 – то же что ОС4 и СУ4, [Ганиянц, Маркин 1997].
- У4 – подсистема ОС4 [Ганиянц, Маркин 1997].
- ФУ – подсистема ФУС, [Ганиянц, Маркин 1997].
- ФУС – расширение ФС с двухместными силлогистическими константами исчерпываемости и неисчерпываемости универсума объемами терминов, [Ганиянц, Маркин 1997]. То же самое что ОФС (2).

Предварительный граф для этих теорий был предложен в [Шиян 2002a]. Ниже докажу ряд теорем, необходимых для построения более точного, чем в [Шиян 2002a], структурного описания. Диаграммы Хассе для этих теорий будут представлены в конце статьи.

Единственное различие в формулировках ОФС в [Маркин 1998a] и [Маркин 1999] и ФУС в [Ганиянц, Маркин 1997], что в качестве константы неисчерпываемости универсума двумя терминами в [Маркин 1998a] и [Маркин 1999] используется графема «q», а в [Ганиянц, Маркин 1997] – графема «j». Будем считать, что это один и тот же знак. Это же касается ОС4 из [Маркин 1999] и УС4 из [Ганиянц, Маркин 1997].

Теорема 4.1. УС4 = ОС4.

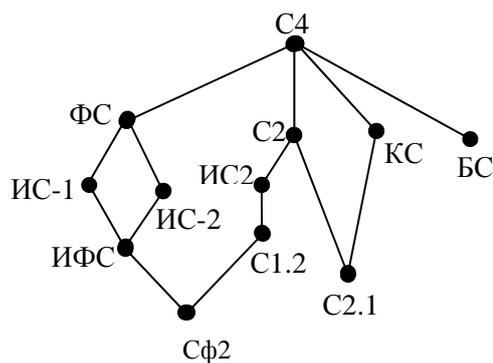
По построению, ОС4 и УС4 различаются наличием следующих аксиом: SaS – ОС4; SiP \supset SaS, SqP \supset SaS, SiS, SqS – УС4.

i. УС4 |- SaS.

1. SiP \supset SaS – акс. УС4;
2. SiS \supset SaS – подст. в 1.;
3. SiS – акс. УС4;
4. SaS – из 2., 3., m.p.

ii. ОС4 |- SiS.

1. SaP \supset SiP – акс. ОС4;
2. SaS \supset SiS – подст. в 1.;



Граф 2. Чистые положительные силлогистики

3. SaS – акс. $OC4$;
 4. SiS – из 2., 3., м.р.
iii. $OC4 \vdash SqS$.
 1. $SaP \supset SqP$ – акс. $OC4$;
 2. $SaS \supset SqS$ – подст. в 1.;
 3. SaS – акс. $OC4$;
 4. SqS – из 2., 3., м.р.
iv. $SaS \vdash SiP \supset SaS, SqP \supset SaS$ – в силу монотонности классической логики.
- Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Теорема 4.2. $\Phi UC \subset OC4$, – [Маркин 1999].

Теорема 4.3. $\Phi Y \subset Y4$.

По построению, ΦY и $Y4$ различаются наличием следующих аксиом: $SaS, SqP \supset SqS, SqP \supset PqP$ – ΦY ; $SaP \supset SqP, SqP \supset SaS, SqS$ – $Y4$.

- i. $Y4 \vdash SaS$.
 1. $SqP \supset SaS$ – акс. $Y4$;
 2. $SqS \supset SaS$ – подст. в 1.;
 3. SqS – акс. $Y4$;
 4. SaS – из 2., 3., м.р.
ii. $SqS \vdash SqP \supset SqS; PqP \vdash SqP \supset PqP$ – в силу монотонности классической логики.
- Утверждение теоремы доказано.

5. Негативные силлогистики

В таблице 2 приведена аксиоматика ряда теорий, описанных А.А. Ильиным в его сообщении на IV Смирновских чтениях. Легко показать, что все они являются расширениями соответствующих чистых позитивных силлогистик. Из таблицы видно, что теории $НАС, НФС, НБС$ и $КНС$ являются подтеориями $НТС$. Теория $НКС$ сформулирована в языке $N^1SL_{a,i,e}$, а $НС$ – в языке $NSL_{a,i,e}$. $НКС$ является подтеорией $НС$, а $НС$ – подтеорией $КНС$ и $НАС$.

Таблица 2.

Аксиомы	НКС	НС	КНС	НАС	НБС	НФС	НТС
$(SaM \wedge MaP) \supset SaP$	+	+	+	+	+	+	+
$SiP \supset PiS$	+	+	+	+	+	+	+
$SaP \supset SiP$	+	+	+	+	+	-	+
$SiP \supset SiS$	-	-	-	-	-	+	-
$SiP \supset SaS$	+	+	+	+	+	-	-
SaS	-	-	-	-	-	+	+
$SeP \equiv \neg SiP$	+	+	+	+	-	+	+
$SoP \equiv \neg SaP$	-	-	-	+	-	+	+
$SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS$	-	-	+	-	+	-	-
$SeP \equiv \neg SiP \wedge SiS$	-	-	-	-	+	-	-
$SiP \equiv SiP''$	-	+	+	+	+	+	+
$SaP \equiv SaP'$	-	-	-	-	+	+	+
$SaP \equiv (SeP' \wedge SiS)$	+	+	+	+	-	-	-
$SaP' \equiv (SeP \wedge SiS)$	+	-	-	-	-	-	-
$SiS \vee S'iS'$	+	+	+	+	+	+	-

- КНС – негативное расширение КС.
- НАС – негативное расширение С2, [Ильин 2003], см. также его статью в настоящем сборнике.
- НБС – негативное расширение БС.
- НКС – реконструкция негативной силлогистики Л. Кэрролла в языке $N^1SL_{a,i,e}$, [Ильин 2002a, 2002b].
- НС – реконструкция негативной силлогистики Л. Кэрролла в языке $NSL_{a,i,e}$.
- НТС – негативное расширение С4.
- НФС – негативное расширение ФС, [Ильин 2000, 2001].

Лемма 5.1. $HKC \vdash (SiM \wedge MaP) \supset SiP$.

1. $(SaM \wedge MaP') \supset SaP'$ – подстановка в аксиому;
2. $(SaM \wedge MeP \wedge MiM) \supset SeP \wedge SiS$ – подстановка в 1 по $SaP' \equiv (SeP \wedge SiS)$;
3. $(SaM \wedge MeP \wedge MiM) \supset SeP$ – из 2;
4. $SaM \supset SiM$ – подстановка в аксиому;
5. $SiM \supset MiS$ – подстановка в аксиому;
6. $MiS \supset MiM$ – теорема НКС;
7. $SaM \supset MiM$ – 4, 5, 6 по транзитивности импликации;
8. $(SaM \wedge MeP) \supset SeP$ – из 3 на основании 7.

Теорема 5.1. $C2.1 \subset HKC$.

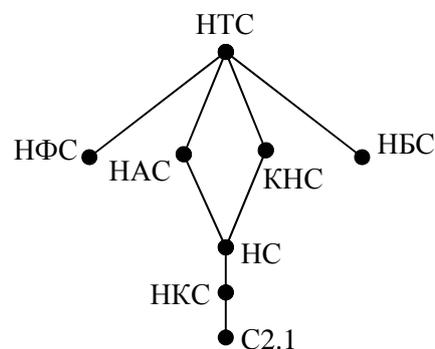
По лемме 5.1, $HKC \vdash (SiM \wedge MaP) \supset SiP$. Остальные аксиомы C2.1 являются аксиомами НКС или тривиально доказываются в ней (см. таблицы 1 и 2). Следовательно, C2.1 является подтеорией НКС.

Теорема 5.2. НС – точный фрагмент НАС и КНС в языке $NSL_{a,i,e}$.

Это следует из того, что НС дефиниционно расширяема до НАС и КНС (вместо аксиом $(SoP \equiv \neg SaP)$ или $(SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS)$ можно взять соответствующие определения).

Диаграмма Хассе для данных теорий представлена на графе 3.

Более сложные вопросы возникают в связи с соотношением этих теорий и сингулярных негативных силлогистик.



Граф 3. Чистые негативные силлогистики

6. Сингулярные силлогистики аристотелевского типа

В литературе описаны следующие сингулярные силлогистики аристотелевского типа.

Позитивные сингулярные силлогистики.

- FC_a^c – сингулярное аристотелевского типа расширение ФС, [Маркин 1991].
- $C2_a^c$ – сингулярное аристотелевского типа расширение С2, [Маркин 1991].

Негативные сингулярные силлогистики.

- $НFC_a^c$ – негативное расширение FC_a^c , [Маркин 1991].
- $НC2_a^c$ – негативное расширение $C2_a^c$, [Маркин 1991].
- СА – негативное сингулярное аристотелевского типа расширение С2, [Маркин

- 1997].
- $CA^+ - CA + (SiS \vee S'iS')$, [Маркин 1997].

Теорема 6.1. $CA^+ \subset HC2_a^c$.

Утверждение теоремы очевидно из следующих семантических фактов:

1. CA^+ и $HC2_a^c$ погружаются посредством одной и той же функции в разные первопорядковые исчисления одноместных предикатов ($HC2_a^c$ в экзистенциальную классическую логику КИОП [Маркин 1991] и CA^+ в свободную логику FL^+ [Маркин 1997]).
2. Семантика адекватная КИОП получается из семантики адекватной FL^+ добавлением дополнительного семантического условия (равенство множества возможных и действительных объектов). То есть множество характеристических моделей для $HC2_a^c$ является строгим подмножеством множества характеристических моделей для CA^+ .
3. Значит, $FL^+ \subset$ КИОП. А отсюда и факта 1 следует утверждение теоремы.

Далее возникает вопрос, как соотносится теория чистой негативной силлогистики НАС с теориями CA , CA^+ и $HC2_a^c$, и НФС – с $НФС_a^c$.

Лемма 6.1. Все аксиомы НАС, кроме $(SiS \vee S'iS')$, доказуемы в CA .

1. Единственное правило вывода НАС является и правилом вывода CA .
2. Все аксиомы НАС только с позитивными терминами доказуемы в CA [Маркин 1997].
3. $CA \vdash SiP \equiv SiP'' \Leftrightarrow FL \vdash \exists x(S(x) \wedge P(x)) \equiv \exists x(S(x) \wedge \neg\neg P(x)) \Leftrightarrow FL \vdash \exists x(S(x) \wedge P(x)) \equiv \exists x(S(x) \wedge \neg\neg P(x)) \Leftrightarrow FL \vdash \exists x(S(x) \wedge P(x)) \equiv \exists x(S(x) \wedge P(x))$ (на основании [Маркин 1997]).
4. $CA \vdash SaP \equiv (SeP' \wedge SiS) \Leftrightarrow FL \vdash \forall x(S(x) \supset P(x)) \wedge \exists xS(x) \equiv (\forall x(S(x) \supset \neg\neg P(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge S(x))) \Leftrightarrow FL \vdash (\forall x(S(x) \supset P(x)) \wedge \exists xS(x)) \equiv (\forall x(S(x) \supset \neg\neg P(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge S(x))) \Leftrightarrow FL \vdash (\forall x(S(x) \supset P(x)) \wedge \exists xS(x)) \equiv (\forall x(S(x) \supset P(x)) \wedge \exists xS(x))$ (на основании [Маркин 1997]).
5. Поскольку переводы $(SiP \equiv SiP'')$ и $(SaP \equiv (SeP' \wedge SiS))$ FL -общезначимы, то сами эти формулы доказуемы в CA .

Теорема 6.2. $НАС \subset CA^+$.

CA^+ получается из CA добавлением аксиомы $(SiS \vee S'iS')$. Отсюда по лемме 6.1 получаем утверждение теоремы.

Теорема 6.3. $НАС + CA = CA^+$.

Для доказательства теоремы, нужно построить объединение языков НАС и CA (в данном случае оно совпадает с $NSLsa$ – языком CA) и объединить дедуктивные постулаты объединяемых систем. НАС (теорема 6.2) и CA (по построению) являются подтеориями CA^+ , значит и $(НАС + CA) \subseteq CA^+$. $CA + (SiS \vee S'iS') = CA^+$; $(SiS \vee S'iS') \in (НАС + CA)$, значит $(НАС + CA) = CA + (SiS \vee S'iS') = CA^+$.

Теорема 6.4. НАС является точным чистым негативным фрагментом $HC2_a^c$.

Это следует из факта, что функции, погружающие НАС и $HC2_a^c$ в КИОП, для формул, не содержащих единичных терминов (т.е. для ППФ языка NSL), дают один и тот же перевод.

Теорема 6.5. НАС является точным чистым негативным фрагментом CA^+ .

Это следует из теорем 6.2 и 6.4.

Теорема 6.6. HC_2^c и CA^+ имеют один и тот же точный чистый негативный фрагмент.
Это следует из теорем 6.4 и 6.5.

Теорема 6.7. НФС является точным чистым негативным фрагментом HFC_a^c .
Это следует из факта, что функции, погружающие НФС и HFC_a^c в КИОП, для формул, не содержащих единичных терминов (т.е. для ППФ языка NSL), дают один и тот же перевод.

7. Сингулярные силлогистики оккамовского типа

В литературе описаны следующие сингулярные силлогистики оккамовского типа.

Позитивные сингулярные силлогистики.

- FC_o^c – сингулярное оккамовского типа расширение ФС, [Маркин 1991].
- $C2_o^c$ – сингулярное оккамовского типа расширение С2, [Маркин 1991].

Негативные сингулярные силлогистики.

- HFC_o^c – негативное расширение FC_o^c , [Маркин 1991].
- $HC_2_o^c$ – негативное расширение $C2_o^c$, [Маркин 1991].
- FC^2 – негативное сингулярное оккамовского типа расширение ФС, $HFC_o^c+v'iv'$ (v – некоторый сингулярный термин), [Маркин 1998b].
- ТС – негативное сингулярное оккамовского типа расширение С4, $HFC_o^c+\alpha i\alpha$ (α – произвольный термин), [Маркин 1998b].

Теорема 7.1. $HFC_o^c \subset FC^2 \subset TC$.

Утверждение теоремы вытекает из формулировок этих теорий, см. [Маркин 1991, с. 85], [Маркин 1998b].

Теорема 7.2. НФС является точным чистым негативным фрагментом HFC_o^c .

Это следует из факта, что функции, погружающие НФС и HFC_o^c в КИОП, для формул, не содержащих единичных терминов (т.е. для ППФ языка NSL), дают один и тот же перевод.

Теорема 7.3. $HFC_a^c \cap HFC_o^c = HFC$.

1. $HFC_a^c \cap NSL = HFC$ – по теореме 6.5;
2. $HFC_o^c \cap NSL = HFC$ – по теореме 7.3;
3. $NSLsa \cap NSLso = NSL$ – теорема 2.1;
4. $HFC \cap HFC = HFC$ – идемпотентность \cap ;
5. $HFC_a^c \cap NSL \cap HFC_o^c \cap NSL = HFC$ – из 1, 2, 4;
6. $HFC_a^c \cap NSL \cap HFC_o^c = HFC$ – из 5, коммутативность и идемпотентность \cap ;
7. $HFC_a^c \cap NSLsa \cap NSLso \cap HFC_o^c = HFC$ – из 6, 3;
8. $HFC_a^c \cap NSLsa = HFC_a^c$ – по формулировке HFC_a^c ;
9. $HFC_o^c \cap NSLso = HFC_o^c$ – по формулировке HFC_o^c ;
10. $HFC_a^c \cap HFC_o^c = HFC$ – из 7, 8, 9.

Теорема 7.4. $HTC \subset TC$.

1. Все позитивные аксиомы НТС являются теоремами С4 и, следовательно, принадлежат ТС ($C4 \subset TC$);
2. Все негативные аксиомы НТС являются также аксиомами НФС и, следовательно, принадлежат ТС (теоремы 7.2 и 7.1);
3. Правила вывода НТС являются и правилами вывода ТС.

Теорема 7.5. $\text{НФС}^c_o + \text{НТС} = \text{ТС}$.

1. $\text{НФС}^c_o + \text{НТС} \subseteq \text{ТС}$ – по теоремам 7.1 и 7.4;
2. Все аксиомы ТС, кроме SiS, являются аксиомами НФС^c_o . $\text{SiS} \in \text{НТС}$;
3. Все правила вывода ТС являются и правилами вывода НФС^c_o ;
4. $\text{ТС} \subseteq \text{НФС}^c_o + \text{НТС}$ – из 2 и 3;
5. $\text{НФС}^c_o + \text{НТС} = \text{ТС}$ – из 1 и 4.

Теорема 7.6. НАС является точным чистым негативным фрагментом $\text{НС}2^c_o$.

Это следует из факта, что функции, погружающие НАС и $\text{НС}2^c_o$ в КИОП, для формул, не содержащих единичных терминов (т.е. для ППФ языка NSL), дают один и тот же перевод.

Теорема 7.7. $\text{НС}2^c_a \cap \text{НС}2^c_o = \text{НАС}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.3.

Теорема 7.8. $\text{НС}2^c_o \subset \text{ТС}$.

1. Все аксиомы $\text{НС}2^c_o$ являются аксиомами или теоремами ТС;
2. $\text{НС}2^c_o$ и ТС имеют по три правила вывода, два из которых совпадают.
3. Третье правило вывода $\text{НС}2^c_o$ в ТС (в теории, где $\neg\text{SiS}$) эквивалентно третьему правилу вывода ТС.

Теорема 7.9. $\text{НС}2^c_o + \text{НТС} = \text{ТС}$.

1. $\text{НС}2^c_o + \text{НТС} \subseteq \text{ТС}$ – по теоремам 7.4 и 7.8;
2. Все аксиомы ТС, кроме SiS, являются аксиомами $\text{НС}2^c_o$. $\text{SiS} \in \text{НТС}$;
3. Два из трех правил вывода ТС являются правилами вывода $\text{НС}2^c_o$;
4. Третье правило вывода ТС в ТС (в теории, где $\neg\text{SiS}$) эквивалентно третьему правилу вывода $\text{НС}2^c_o$;
5. $\text{ТС} \subseteq \text{НС}2^c_o + \text{НТС}$ – из 2-4;
6. $\text{НС}2^c_o + \text{НТС} = \text{ТС}$ – из 1 и 5.

8. Расширенные силлогистики

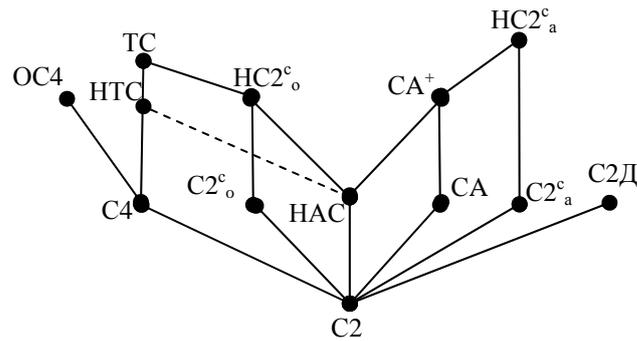
В литературе описаны расширения систем ФС и С2 до булевой алгебры (до теорий дефинициально эквивалентных булевой алгебре), см. [Маркин 1991].

- С2Д – расширенная до булевой алгебры С2 (формулировка Смирнова), [Смирнов 1983]. Другая формулировка (В.А. Бочарова) – $\text{АгС}2$.
- ФСД – расширенная до булевой алгебры ФС, [Маркин 1991].

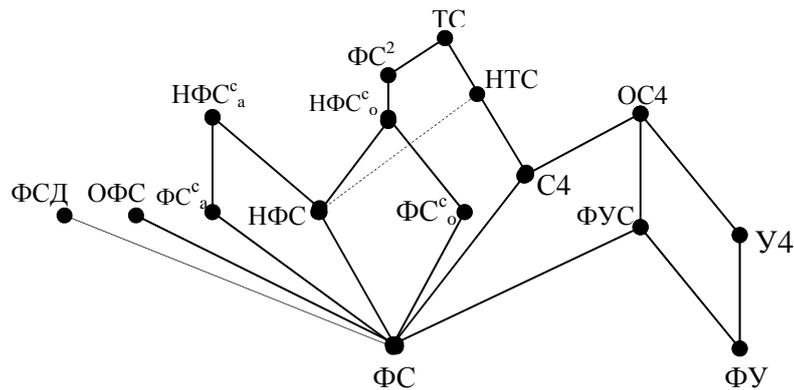
Для всех аксиом НФС, кроме $(\text{SiS} \vee \text{S}'\text{iS}')$, легко показать, что они доказуемы в ФСД. Аналогично, для всех аксиом НАС, кроме $(\text{SiS} \vee \text{S}'\text{iS}')$, легко показать, что они доказуемы в С2Д. Вопрос о доказуемости $(\text{SiS} \vee \text{S}'\text{iS}')$ в ФСД и С2Д и, следовательно, о соотношении этих теорий с НФС и НАС оставляю пока открытым.

9. Некоторые итоги

На основании графов, построенных в [Шиян 2002a], и доказанных здесь новых теорем можно построить диаграммы Хассе, демонстрирующие соотношение по дедуктивной силе рассмотренных в данной статье расширений теорий ФС, С2 и С4. Пунктирная линия на графах 4 и 5, как и выше, показывает, что она проходит «через третье измерение» и не пересекается со сплошными линиями.



Граф 4. Расширения теории C2.



Граф 5. Расширения теории ФС.

В связи с соотношением рассмотренных теорий, можно поставить следующие вопросы, оставшиеся неосвещенными в этой статье:

- Является ли C2.1 точным фрагментом НКС и НС в языке $SL_{a,i}$?
- Является ли НКС точным фрагментом НС в языке $N^1SL_{a,i,e}$?
- Каковы точные негативные фрагменты теорий $ФС^2$, ТС, СА, ФСД и C2Д?
- Что за теории получаются дефинициальным расширением C2.1 за счет определения Е и О как $(SeP \equiv_{df} \neg SiP \wedge SiS)$ и $(SoP \equiv_{df} \neg SaP \wedge SiS)$ или как $(SeP \equiv_{df} \neg SiP \wedge SiS)$ и $(SoP \equiv_{df} \neg SaP)$. Как первая из этих теорией соотносится с БС?
- В связи с реконструкциями кэрролловской силлогистики возникает особый интерес к соотношению силлогистик в языке $SL_{a,i,e}$, в котором могут быть сформулированы теории кэрролловского, васильевского и ломоносовского типов.

Литература

1. [Ганиянц, Маркин 1997] Ганиянц И.И., Маркин В.И. Силлогистики с константой исчерпываемости // Международная конференция «Развитие логики в России: итоги и перспективы». Тезисы докладов и сообщений. М., 1997.
2. [Ильин 2000] Ильин А.А. Негативная фундаментальная силлогистика // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 2000.
3. [Ильин 2001] Ильин А.А. Негативная фундаментальная силлогистика // Смирновские чтения. 3 Международная конференция. М., 2001.
4. [Ильин 2002a] Ильин А.А. Негативная силлогистика Л. Кэрролла // Современная логика. Материалы 7-й Общероссийской научной конференции. СПб, 2002.
5. [Ильин 2002b] Ильин А.А. Негативная силлогистика Льюиса Кэрролла // Материалы

- 7-й Международной научно-технической конференции. М., 2002.
6. [Ильин 2003] Ильин А.А. Негативная силлогистика аристотелевского типа // Смирновские чтения. 4 Международная конференция. М., 2003.
 7. [Маркин 1991] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
 8. [Маркин 1997a] Маркин В.И. Формализация традиционной сингулярной негативной силлогистики // Международная конференция: «Смирновские чтения». М., 1997.
 9. [Маркин 1997b] Маркин В.И. Сингулярная негативная силлогистика Аристотеля и свободная логика // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997.
 10. [Маркин 1998a] Маркин В.И. Системы силлогистики, адекватные двум переводам силлогистических формул в исчисление предикатов В.А. Смирнова // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998.
 11. [Маркин 1998b] Маркин В.И. Формальная реконструкция традиционной сингулярной негативной силлогистики // Логические исследования. Вып. 5. М.: Наука, 1998.
 12. [Маркин 1999] Маркин В.И. Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
 13. [Маркин 2002] Маркин В.И. Фундаментальная силлогистика с интенциональной точки зрения // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002.
 14. [Маркин 2003] Маркин В.И. Интенциональные аналоги аристотелевско-оккамовской позитивной силлогистики // Смирновские чтения. 4 Международная конференция. М., 2003.
 15. [Смирнов 1983] Смирнов В.А. Дефинициальная эквивалентность расширенной силлогистики С2Д булевой алгебре // Логические исследования. М., 1983.
 16. [Смирнов 2001] Смирнов В.А. Логико-философские труды. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
 17. [Смирнов 2002] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
 18. [Шиян 2000] Шиян Т.А. Классификация теорий чистой позитивной силлогистики // Электронный журнал Логические исследования, №4. www.logic.ru.
 19. [Шиян 2002a] Шиян Т.А. Методы классификации формальных теорий и множество силлогистик // Аспекты: Сборник статей по философским проблемам истории и современности. М.: Изд-во «Современные тетради», 2002.
 20. [Шиян 2002b] Шиян Т.А. Множество формальных силлогистик с простыми «общими» термами (структурное описание и количественный анализ) // Электронный журнал Logical Studies, №8. www.logic.ru.