

Структурные классификации формальных теорий¹

Шиян Т.А. Структурные классификации формальных теорий // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы VII Общероссийской научной конференции. 20-22 июня 2002. СПб., 2002. С. 515-518.

Сохранено с сайта: <http://taras-shiyan.narod.ru>.
E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

1. Теории и теория-подобные объекты (ТПО – различные математические объекты, которые могут рассматриваться как модели или проекты теорий: формальные теории (ФТ), алгебры и исчисления, логические матрицы, логические модели и т.п.) являются для современной логики не только основной формой фиксации знаний, но и основным объектом изучения. Это и понятно: во-первых, для современной математики (а современная логика, безусловно, является ее частью) характерна постоянная рефлексия собственных средств и выход на все новые и новые метауровни, во-вторых, к настоящему времени известны уже континуальные классы ФТ и необходимо хоть как-то разобраться в этом разнообразии.

2. Задача систематизации решается в рамках исследований по сравнению ФТ и изучению структурных свойств классов ФТ. Изучение классов ФТ началось, по крайней мере, с Тарского и реализуется, обычно, в форме построения алгебр или решеток (и других структур) над теориями. Фрагменты решеток естественным образом представимы графически в форме графов, что может быть использовано в учебных и справочных целях.

3. Для изучения и описания множеств ФТ можно использовать метод структурных классификаций. Метод состоит в задании на множестве классифицируемых объектов некоторого отношения порядка. При этом существенным образом используются результаты сравнения ФТ: от них зависит приписывание двум ФТ отношения больше/меньше.

Существует много различных методов сравнения ФТ, но все они, похоже, сводятся к двум основным порядкам.

4. Один из этих порядков определяется соотношением ФТ по дедуктивной силе. Напомню, что *ФТ – множество формул некоторого формального языка, замкнутое относительно некоторых правил вывода. Элементы ФТ называются ее теоремами.* Таким образом, соотношение ФТ по дедуктивной силе соответствует обычным теоретико-множественным соотношениям по объему, а соответствующий порядок задается отношением « \subseteq » или « \subset ». ФТ, относительно данного порядка, образуют решетку с нулем (\emptyset).

5. При попытке рассматривать ФТ как теории возникает ряд «парадоксов». Например, сформулировав классическую логику высказываний с одним и тем же множеством пропозициональных символов, но разными множествами связок: $\{\neg, \&\}$, $\{\neg, \wedge\}$ и $\{\neg, \wedge, \vee\}$, – получаем: $TV_{\neg, \wedge} \subset TV_{\neg, \wedge, \vee}$ и $TV_{\neg, \wedge} \cap TV_{\neg, \&} = \emptyset$ (в $TV_{\neg, \wedge}$ и $TV_{\neg, \&}$ нет общих теорем). В ряде случаев эту «парадоксальность» можно обойти, строя обобщенные классификации по дедуктивной силе. Это достигается отождествлением между собой некоторых, в общем-то не тождественных, символов и выражений.

¹ © Шиян Т.А., 2002.

Например, отождествлением «&» и «^» (знаки конъюнкции), силлогистические выражения типа «ASP» с выражениями типа «SaP» и т.п.

6. Второй порядок связан с информативностью ФТ, их выразительными возможностями и т.п. Этот порядок можно выявить, сравнивая ФТ методом погружающих операций или методом дефинициальных расширений (оба метода дают одинаковый результат): $(T_1 \leq^* T_2) \Leftrightarrow (\text{существует операция, погружающая } T_1 \text{ в } T_2 \text{ (т.е. } \exists \varphi \forall A (T_1 \vdash A \Leftrightarrow T_2 \vdash \varphi(A)))) \Leftrightarrow (T_1 \text{ дефинициально выразима в } T_2)$. Можно сформулировать и другие критерии наличия этого отношения между произвольными ФТ T_1 и T_2 .

7. Определенное так отношение \leq^* является отношением нестрогого порядка, т.е. рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Порождаемое \leq^* отношение эквивалентности не является экстенциональным, т.е. $(T_1 =^* T_2)$ не означает, что T_1 и T_2 – одна и та же ФТ. Т.о., отношение $=^*$ разбивает множество ФТ на классы эквивалентности. Например, на множестве формальных силлогистик (и близких им теорий) выделяются следующие классы: CS (классическая силлогистика) – содержит {C2, C3.1, FC, KC, BC, C2V, FB, BB, FY}; TS (традиционная силлогистика) – содержит {C4, C4B, Y4}; булева алгебра – содержит {B, BA, C2D, FCD}; булева алгебра с атомами – содержит {C2DA, EO} и другие [1., с. 31].

Соответственно, отношение \leq^* не порождает решетки на множестве ФТ. Но решетку образуют классы эквивалентности ФТ (относительно $=^*$). Здесь возникает некоторая «парадоксальность»: рассматривая разные множества ФТ, мы получаем разные классы эквивалентности. Например, если S – некоторый класс эквивалентности ФТ и $T \notin S$, то $S \neq S \cup \{T\}$ (S и $S \cup \{T\}$ – разные множества). Но при этом порядок остается тем же, т.е. объекты S и $S \cup \{T\}$ будут претендовать на одно и то же место в решетке. Иначе говоря, задаваемый отношением \leq^* порядок не экстенционален.

8. Введем новый тип ТПО, характеризующих ФТ по их выразительным возможностям, и функцию $\{ \}$, которая каждой ФТ ставит в соответствие некоторый объект этого нового типа:

$$\{T_1\} \leq \{T_2\} \Leftrightarrow T_1 \leq^* T_2,$$

$$\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow \{T_1\} \leq \{T_2\} \ \& \ \{T_2\} \leq \{T_1\} \text{ (где } = \text{ – обычное равенство, т.е. } \{T_1\} \text{ и } \{T_2\} \text{ – один и тот же объект).}$$

Содержательная трактовка объектов типа $\{T\}$ затруднена, т.к. представляет собой объяснение непонятого через непонятое: объект $\{T\}$ может быть назван «интенционалом», «информационной характеристикой» или «сущностью» T . Тем не менее, способ задания этих «интенционалов» позволяет нам оперировать с ними и изучать их обычными экстенциональными средствами.

9. Между ТПО различных типов могут быть установлены соответствия и эквивалентности. Например, исчисление S и ФТ T эквивалентны е.т.е. S совпадает с множеством теорем T ; эквивалентность исчисления S с некоторой логической матрицей или логической моделью доказывается теоремами о семантической непротиворечивости и полноте исчисления S и т.п. Таким образом, задавая алгоритм упорядочения ФТ и способы установления эквивалентности между ТПО разных типов, мы, тем самым, упорядочиваем (правда, косвенно) все множество ТПО. Иными словами, в данных тезисах приведен способ математического структурного описания предмета современной символической логики.

10. Любой научный (или псевдонаучный) предмет – очень сложное знаниевое образование и не может быть описан одной или даже двумя структурами. Это требует более сложных методов, например, метода структурно-системного описания. Этот метод состоит в использовании многих структурных классификаций, связанных между

собой. Количество используемых при этом структурных классификаций определяется нашими задачами (требуемой полнотой описания, интересующими нас свойствами и т.п.).

Литература

1. Шиян Т.А. Методы классификации формальных теорий и множество силлогистик // Аспекты: Сборник статей по философским проблемам истории и современности. М., 2002.