Методы классификации формальных теорий и множество силлогистик[1]

Шиян Т.А. Методы классификации формальных теорий и множество силлогистик // Аспекты: Сборник статей по философским проблемам истории и современности. М.: Изд-во «Современные тетради», 2002. С. 23-36.
Сохранено с сайта: http://taras-shiyan.narod.ru.
E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

1. Некоторые предпосылки

За последний век было построено большое число различных формальных теорий. Было не только осознано, но и строго доказано существование бесконечного числа логических теорий. Более того, одних только пропозициональных логик известны континуальные классы. В связи с этим на первый план выходят методы сравнения и классификации теорий, а область исследований смещается от изучения отдельных логик к изучению целых классов логических теорий. Эти и другие процессы внутри логики привели к постановке задачи по прояснению и уточнению таких терминов и понятий как *логика*, *теория* и т.п.

Все применяемые сегодня методы сравнения и классификации теорий исходят явно или неявно из понятия теории, которое можно, в духе средневековых логиков, назвать материальным. Это понятие восходит к Альфреду Тарскому и широко используется в современной логике (см., например, [Смирнов 1987]).

Df.1.1. Теория - множество формул, замкнутое относительно правил вывода.

Это понятие очень удобно и практично, т.к. сводит теорию к множеству "материальных" объектов (формул языка), или - содержательно - к множеству теорем данной теории. Оборотной стороной этих достоинств является излишняя зависимость понятия теории от языка, т.к. реализации некоторой теории в разных языках являются (согласно **Df.1.1**) разными теориями. Тем не менее это понятие теории и основывающиеся на нем методы сравнения и классификации являются мощным и достаточно совершенным инструментом современной металогики.

В настоящее время можно выделить три основных метода сравнения теорий:

1. метод погружающих операций,
2. метод дефинициальных расширений,
3. метод сравнения по дедуктивной силе.

Возможность применения того или иного метода во многом зависит от языков, в которых сформулированы сравниваемые теории.

В работе я буду использовать следующие обозначения:

1. При необходимости подчеркнуть, что термин "теория" употребляется в смысле определения **Df.1.1**, буду использовать запись "теория-1".

2. Cn(Г) - дедуктивное замыкание множества Г относительно некоторого фиксированного множества операций над Г.
3. Запись "T_2=T_1+A" обозначает факт, что формулировку теории T_2 можно получить из формулировки теории T_1 присоединением дополнительной аксиомы А (с последующим замыканием относительно правил вывода). Аналогично для "T_2=T_1+Г", где Г - некоторое множество формул. Формально:

   $T_1+\Gamma =_{Df} Cn(T_1\cup\Gamma)$ и

   $T_1+A =_{Df} Cn(T_1\cup\{A\})$.
4. Запись "L(T)" обозначает язык теории T, который понимается как множество ППФ (правильно построенных формул).

Остальные обозначения являются общепринятыми либо вводятся по мере появления. Упоминаемые имена теорий и исчислений и их описание вынесены в конец работы.

2. Метод сравнения по дедуктивной силе

Сравнение теорий по дедуктивной силе кажется наиболее естественным методом сравнения. Идея проста. Раз теории отождествляются с некоторыми множествами, то к ним можно применять обычные теоретико-множественные операции и отношения: $\subset$, $\subseteq$, =, $\cap$, $\cup$, ~ и др.

Df.2.1. T_2 - дедуктивное расширение $T_1 \Leftrightarrow (T_1 \subseteq T_2)$.

В случае операций над теориями имеется ряд особенностей и проблем. Пусть T_1 и T_2 - некоторые теории, сформулированные в одном языке.

1. Множество $T_1\cap T_2$ - замкнуто относительно выводимости, т.е. является теорией. Задача (или проблема), встающая при этом, - конструктивное описание теории $T_1\cap T_2$, т.е. множества дедуктивных постулатов, ее определяющих.
2. Множество $T_1\cup T_2$ - не всегда замкнуто (из $T_1\cup T_2$ могут выводиться формулы, не принадлежащие ни T_1, ни T_2). Для преодоления данной трудности вводится новая операция:

   Df.2.2. $T_1+T_2 =_{Df} Cn(T_1\cup T_2)$

Понятно, что теория T_1+T_2 может оказаться противоречивой.

Алгебры в сигнатуре {$\cap$, +, ~} рассматривались Тарским ([Смирнов 1987] с ссылкой на [Tarski 1956]). Пусть $\boldsymbol{T}$ - множество теорий, сформулированных в одном языке на базе классической логики высказываний. Тогда,

если $\boldsymbol{T}$ - множество конечно-аксиоматизируемых теорий, то $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{T}; \cap, +, \sim\}$ - булева алгебра,

если $\boldsymbol{T}$ - множество конечно-неаксиоматизируемых теорий, то $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{T}; \cap, +, \sim\}$ - брауэрова алгебра.

Указанным алгебрам соответствуют одноименные решетки. Противоречивая теория (множество всех ПП-формул данного языка) - является единицей, а $\varnothing$ - нулем рассматриваемых алгебр и решеток. Теория T_1+T_2 - максимум, а $T_1\cap T_2$ - минимум для T_1 и T_2. Достаточно очевидно, что множество всех возможных теорий (равно как и его подмножество - множество всех возможных силлогистических теорий) образует решетку с нулем.

Иногда соотношение теорий следует из самого способа их построения, например,

(1) (C1+SiP⊃SaS)=C2, (C2+SiS)=C4 и т.п.

или

(2) $TV_{\rceil,\supset}$ (классическое исчисление высказываний со связками $\rceil$ и $\supset$) расширяется до $TV_{\rceil,\supset,\wedge,\vee,\equiv}$ за счет расширения алфавита ($\{\rceil, \supset\}\subseteq\{\rceil, \supset, \wedge, \vee, \equiv\}$) и присоединения определений для новых знаков.

Для дальнейшего рассмотрения имеет смысл определить разные типы расширений.

Df.2.3. T_2 - консервативное расширение $T_1 \Leftrightarrow L(T_1)\subseteq L(T_2)$ & $\forall A(A\in L(T_1)$
$\Rightarrow (T_2 \vdash A \Leftrightarrow T_1 \vdash A))$.

Выше в (1) приведены примеры неконсервативных расширений, а в (2) - пример консервативного расширения.

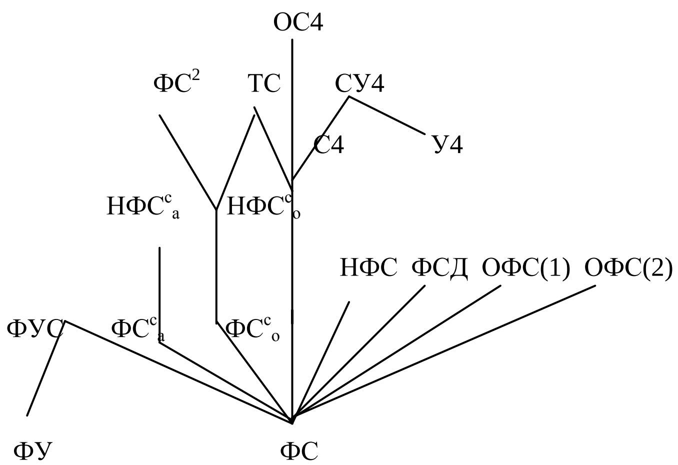
Df.2.4. T_2 - собственное расширение $T_1 \Leftrightarrow L(T_2)=L(T_1)$ & $(T_1 \subseteq T_2)$.

Выше в (1) приведены примеры собственных, а в (2) - несобственного расширений.

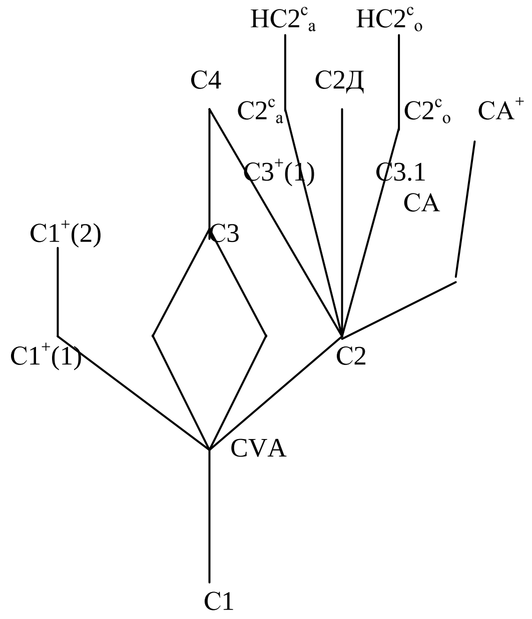
Зафиксируем отношения по объему между теорией и ее различными расширениями.

1. $T_1=T_2 \Leftrightarrow T_2$ - собственное консервативное расширение T_1.
2. $T_1\subset T_2 \Leftrightarrow T_2$ - несобственное или неконсервативное расширение T_1.
3. $T_1\subseteq T_2 \Leftrightarrow T_2$ - собственное или консервативное расширение T_1.

На основании анализа источников ([Ганиянц, Маркин 1997], [Ильин 2001], [Маркин 1991, 1997, 1998b], [Мчедлишвили 1999], [Смирнов 1980, 1994]) можно построить следующие графы, представляющие соотношения описанных в литературе теорий. Хотя это направленные графы, я ради простоты восприятия не изображал стрелки. Увеличение дедуктивной силы происходит снизу вверх.



Граф 1.



Граф 2.

Классификацию теорий чистой позитивной силлогистики С2, ФС, КС, БС, С3.1, С1, С3, С4 в стандартном силлогистическом языке (с константами a, i, e, o) см. в [Шиян 2000].

Для некоторых из указанных на графах теорий известны другие имена или другие формулировки:

1. С4 дедуктивно эквивалентна силлогистике Лукасевича ([Лукасевич 1959]) и системе ЕА Мчедлишвили ([Мчедлишвили 1999]),
2. С1 дедуктивно эквивалентна системе Слупецкого,
3. С2Д дедуктивно эквивалентна АгС2 ([Бочаров 1983], [Смирнов 1983а]),
4. ФСД дедуктивно эквивалентна ВД ([Маркин 1991]).

Напоследок хочу обратить внимание на "парадоксы" метода.

1) Метод работает, когда сравниваем теории, сформулированные в одном языке.

2) Метод естественным образом переносится на сравнение теорий и их несобственных расширений. Правда, в случае некоторых консервативных расширений теорий может вставать вопрос, насколько правомерно называть такое расширение "дедуктивно более сильным". Например, для двух формулировок КЛВ с одним и тем же множеством пропозициональных символов и связками $\{\rceil, \wedge\}$ (одна) и $\{\rceil, \wedge, \vee\}$ (другая), верно, что $TV_{\rceil,\wedge} \subset TV_{\rceil,\wedge,\vee}$.

3) Одна и та же теория (в некотором интуитивном смысле), будучи сформулирована в разных языках, даст разные теории-1. Так для двух формулировок КЛВ даже с одним и тем же множеством пропозициональных символов и связками $\{\rceil, \wedge\}$ (одна) и $\{\rceil, \&\}$ (другая), верно, что $TV_{\rceil,\wedge} \cap TV_{\rceil,\&} = \varnothing$, т.е. в $TV_{\rceil,\wedge}$ и $TV_{\rceil,\&}$ нет общих теорем.

Надо заметить, что данный метод теснее других связан с понятием теории-1 и в наибольшей степени зависит от языков сравниваемых теорий. Поэтому указанные "парадоксы" выявляют не столько недостатки метода (он естественно вытекает из понятия теории-1), сколько недостатки самого этого понятия.

3. Метод дефинициальных расширений

Метод дефинициальных расширений в некотором смысле дополняет метод сравнения по дедуктивной силе и частично обходит упомянутые выше "парадоксы". Но появляются свои ограничения: метод применим только к консервативным расширениям некоторой (возможно пустой) теории. Иными словами, мы можем отождествить между собой знаки и выражения языков сравниваемых теорий только тогда, когда они совпадают нее только графически, но и дедуктивно.

Df.3.1.a. T_1 дефинициально определима в T_2 е.т.е. язык T_2 можно расширить символами и конструкциями T_1, а множество дедуктивных постулатов - такими определениями новых выражений из $L(T_1)$ через выражения $L(T_2)$, что в новой теории T_2' для всех выражений языка T_1 будут доказуемы те же утверждения (и только они), что и в T_1. Теория T_2' при этом называется дефинициальным расширением T_2.

В качестве сокращения для "T_1 дефинициально определима в T_2" буду использовать запись "$T_1 =_{def} T_2$". Отношение дефинициальной определимости "$\subseteq_{def}$" является отношением нестрогого порядка, т.е. рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Df.3.2. $(T_1 =_{def} T_2) =_{Df} (T_1 \subseteq_{def} T_2)\ \&\ (T_2 \subseteq_{def} T_1)$,

T_1 и T_2 дефинициально эквивалентны е.т.е. T_1 дефинициально определима в T_2 и T_2 дефинициально определима в T_1.

С применением метода дефинициальных расширений в силлогистике получены следующие результаты.

1. (С2Д $=_{def}$ В) - [Смирнов 1983a].
2. (В $=_{def}$ ВД) - [Маркин 1991].
3. (С2ДА $=_{def}$ ЕО) - [Смирнов 1993].
4. С2, ФС, БС, КС, C2V - дефинициально эквивалентны [Смирнов 1994].
5. (ФВ $=_{def}$ ФС) - [Костюк 1999], без доказательства.
6. (БВ $=_{def}$ БС) - [Костюк 1999], без доказательства.
7. (С4В $=_{def}$ С4) - [Костюк 1999], без доказательства.

На основании этих результатов выделяются следующие группы дефинициально эквивалентных теорий.

1. {С2, ФС, БС, КС, C2V, ФВ, БВ}
2. {В, С2Д, ФСД}
3. {С2ДА, ЕО}
4. {С4В, С4}

В связи с этими результатами и данными, представленными на графах 1-3, встает ряд вопросов о наличии дефинициальной эквивалентности между
1) ФС и ФУ; С4 и У4;
2) $С2^c_о$ и $ФС^c_о$; $С2^c_а$ и $ФС^c_а$; $НС2^c_о$ и $НФС^c_о$; $НС2^c_а$ и $НФС^c_а$.
На вопросы первой группы можно ответить положительно на основе результатов, изложенных в следующей части. Вопросы же второй группы требуют отдельного исследования.

4. Метод погружающих операций

Метод погружающих операций наименее зависим от языка сравниваемых теорий и применим для сравнения теорий, сформулированных в графически одном языке, полностью или частично различных языках, в языках разной категориальной структуры. Состоит в нахождении функций, переводящих формулы одной теории в формулы другой.

Df.4.1.a. Функция φ называется процедурой, погружающей T_1 в T_2 е.т.е. $\forall A(T_1 \vdash A \Leftrightarrow T_2 \vdash \varphi(A))$.

Df.4.1.b. $(T_1 \subseteq_{rek} T_2) =_{Df} \exists\varphi\forall A(T_1 \vdash A \Leftrightarrow T_2 \vdash \varphi(A))$,

T_1 погружается в T_2 (T_1 рекурсивно содержится в T_2) е.т.е. существует процедура, погружающая T_1 в T_2.

Df.4.2. Функция φ называется переводом T_1 в T_2, если $\forall A(T_1 \vdash A \Rightarrow T_2 \vdash \varphi(A))$.

В.А. Смирновым был высказан следующий критерий погружаемости T_1 в T_2:

$(T_1 \subseteq_{rek} T_2) \Leftrightarrow \exists\varphi(\varphi$ - перевод T_1 в $T_2)$ и $\exists\psi(\psi$ - перевод T_2 в $T_1)$ и $(T_1 \vdash A \equiv \psi(\varphi(A)))$.

Отношение погружаемости "$\subseteq_{rek}$" является отношением нестрого порядка, т.е. рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Df.4.3. $(T_1 =_{rek} T_2) =_{Df} (T_1 \subseteq_{rek} T_2) \& (T_2 \subseteq_{rek} T_1)$

T_1 и T_2 рекурсивно эквивалентны е.т.е. T_1 погружается в T_2 и T_2 погружается в T_1.

При сравнении этого метода с предыдущими можно заметить следующие зависимости.

1. Если теории-1 T_1 и T_2 - реализации в разных языках одной и той же теории (в интуитивном смысле), то $(T_1 =_{rek} T_2)$.
2. Если T_2 - консервативное расширение T_1, то $(T_1 \subseteq_{rek} T_2)$.
3. Если T_2 - консервативное расширение T_1 и символы T_2, отличные от символов T_1, выразимы через символы T_1, то $(T_1 =_{rek} T_2)$.
4. $(T_1 \subseteq_{rek} T_2) \Leftrightarrow (T_1 \subseteq_{def} T_2)$.
5. $(T_1 =_{rek} T_2) \Leftrightarrow (T_1 =_{def} T_2)$.

Последние два утверждения связаны с тем, что погружаемость и дефинициальная определимость являются разными проявлениями определимости понятий одной теории через понятия другой.

В силлогистике с применением метода погружающих операций были получены следующие результаты.

1. (С4 $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Vieru 1971]; [Смирнов 1983b] и [Маркин 1983] (для перевода Бочарова); [Бежанишвили, Мчедлишвили 1985] (причем, результат доказан для трех различных погружающих операций: Виеру, Бочарова [Бочаров 1980] и Бежанишвили-Мчедлишвили).
2. (С2 $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Смирнов 1983b], [Маркин 1983], [Бежанишвили, Мчедлишвили 1985], [Маркин 1991].
3. (ФС $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
4. (КС $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].

5. (БС $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
6. (С3.1 $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
7. ($С1^{+}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
8. ($С3^{+}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
9. (Существует перевод С1 в КИОП1) - [Смирнов 1980].
10. $\rceil$(С1 $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Мчедлишвили 1986].
11. (Существует перевод С3 в КИОП1) - [Смирнов 1980].
12. $\rceil$(С3 $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Мчедлишвили 1986].
13. (С4 $\subseteq_{rek}$ ФС) - [Маркин 1991].
14. (С2 $\subseteq_{rek}$ ФС) - [Маркин 1991].
15. (ФС $\subseteq_{rek}$ С2) - [Маркин 1991].
16. (КС $\subseteq_{rek}$ ФС) - [Маркин 1991].
17. (ФС $\subseteq_{rek}$ КС) - [Маркин 1991].
18. (БС $\subseteq_{rek}$ ФС) - [Маркин 1991].
19. (ФС $\subseteq_{rek}$ БС) - [Маркин 1991].
20. (С3.1 $\subseteq_{rek}$ ФС) - [Маркин 1991].
21. (ФС $\subseteq_{rek}$ С3.1) - [Маркин 1991].
22. (ОФС(1) $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
23. ($С1^{+}(1)$ $\subseteq_{rek}$ ОФС(1)) - [Маркин 1991].
24. (ОФС(1) $\subseteq_{rek}$ $С1^{+}(1)$) - [Маркин 1991].
25. ($С3^{+}$ $\subseteq_{rek}$ ОФС(1)) - [Маркин 1991].
26. ($ФС^{c}_{a}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
27. ($С2^{c}_{a}$ $\subseteq_{rek}$ $ФС^{c}_{a}$) - [Маркин 1991].
28. ($С2^{c}_{a}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
29. ($ФС^{c}_{o}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1=) - [Маркин 1991].
30. ($С2^{c}_{o}$ $\subseteq_{rek}$ $ФС^{c}_{o}$) - [Маркин 1991].
31. ($С2^{c}_{o}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1=) - [Маркин 1991].
32. ($НФС^{c}_{a}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
33. ($НС2^{c}_{a}$ $\subseteq_{rek}$ $НФС^{c}_{a}$) - [Маркин 1991].
34. ($С2^{c}_{a}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1991].
35. ($НФС^{c}_{o}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1=) - [Маркин 1991].
36. ($НС2^{c}_{o}$ $\subseteq_{rek}$ $НФС^{c}_{o}$) - [Маркин 1991].
37. ($НС2^{c}_{o}$ $\subseteq_{rek}$ КИОП1=) - [Маркин 1991].
38. (ArC2 $\subseteq_{rek}$ ВА) - [Бочаров 1983].
39. (ВА $\subseteq_{rek}$ ArC2) - [Бочаров 1983].
40. (С4 $\subseteq_{rek}$ КЛВ) - [Канаи 1993].
41. (ФС $=_{rek}$ С2), (КС $=_{rek}$ С2), (БС $=_{rek}$ С2) - заметил В.А. Смирнов в [Смирнов 1984] на основании результатов [Маркин 1991].
42. (ФС $=_{rek}$ С3.1) - на основании результатов [Маркин 1991].
43. (С4 $=_{rek}$ У4) - [Ганиянц, Маркин 1997].
44. (ФС $=_{rek}$ ФУ) - [Ганиянц, Маркин 1997].
45. ($НФС^{c}_{o}$ $\subseteq_{rek}$ $ИП^{2}$) - [Маркин 1998b], без доказательства.
46. ($ФС^{2}$ $\subseteq_{rek}$ $ИП^{2}$) - [Маркин 1998b].
47. (ТС $\subseteq_{rek}$ $ФС^{2}$) - [Маркин 1998].
48. (ТС $\subseteq_{rek}$ $ИП^{2}$) - [Маркин 1998b].
49. (ОФС(2) $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1998].
50. ($С1^{+}(2)$ $\subseteq_{rek}$ ОФС(2)) - [Маркин 1998].

51. (С1$^+$(2) $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Маркин 1998].
52. С3.1 $\subseteq_{rek}$ ОФС(2)) - [Маркин 1998].
53. (ЕА $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Мчедлишвили 1999].
54. (ОС4 $\subseteq_{rek}$ ОФС) - [Маркин 1999].
55. (БВ $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Костюк 1999], без доказательства.
56. (С4В $\subseteq_{rek}$ КИОП1) - [Костюк 1999].

На основании изложенных результатов и можно выделить следующие группы рекурсивно эквивалентных теорий.

1. {С2, ФС, КС, БС, С3.1, ФУ},
2. {ArC2, ВА},
3. {С1$^+$(1), ОФС(1)},
4. {С4, У4}.

На основании некоторых результатов, приведенных в списке, можно выдвинуть следующую гипотезу о соотношении отношений погружаемости и "быть собственным расширением":

если T' - собственное расширение T, то (T' $\subset_{rek}$ T).

Эта гипотеза подтверждается следующими наблюдениями:

1. (С4 $\subseteq_{rek}$ С2), С4 - собственное расширение С2,
2. $\rceil$(С1 $\subseteq_{rek}$ С2), С2 - собственное расширение С1,
3. $\rceil$(С3 $\subseteq_{rek}$ С3.1), С3.1 - собственное расширение С3.

Данная гипотеза подтверждается также и тем, семантическим соображением, что класс моделей для T' является строгим подмножеством класса моделей для T.

Граф, который можно построить на основе выше приведенных данных, получается очень сложным и разветвленным. Его можно естественным образом обобщить (и, соответственно, упростить), представив все рекурсивно эквивалентные друг другу теории одной вершиной. Т.е., фактически, изображать отношения не между теориями, а между классами эквивалентности. Здесь мы непосредственно подходим к следующему пункту нашего дискурса.

5. Анализ понятия теории

В современной логике используется два представления о теории. Первое представление оформлено понятийно (см. **Df.1.1.**) и обозначено мной как "теория-1". Разбирая методы сравнения теорий, я попутно обращал внимание на особенности и недостатки этого понятия. Второе представление зафиксировано в употреблении и понимании (логиками) таких выражений, например, как "классическая логика высказываний" (КЛВ), "классическая логика предикатов" (КЛП) и т.п. При этом мы понимаем некоторое исчисление или теорию-1 как КЛВ независимо от графем языка или применяемых при формулировке связок. Обозначу такое понимание теории как "теория-2". Как было отмечено выше, разные формулировки одной теории (во втором понимании) являются рекурсивно и дефинициально эквивалентными. Обозначу через "$\{T\}$" теорию-2, реализуемую теорией-1 T. Теперь можно сформулировать критерий того, что две теории-1 (например, T_1 и T_2) являются реализациями одной и той же теории-2:

Df.5.1.a. Теории-1 являются реализациями одной и той же теории-2 е.т.е. теории-1 дедуктивно, дефинициально или рекурсивно эквивалентны друг другу.

Df.5.1.b. $\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow (T_1 = T_2) \vee (T_1 =_{dfl} T_2) \vee (T_1 =_{rek} T_2)$.

Иными словами, если все понятия T_1 определимы в T_2 и все понятия T_2 определимы в T_1, то T_1 и T_2 - одна и та же теория (в смысле 2).

Df.5.2.a. $\{T_1\} \leq \{T_2\} \Leftrightarrow T_1$ определима в T_2.

Df.5.2.b. $\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow \{T_1\} \leq \{T_2\}$ & $\{T_2\} \leq \{T_1\}$.

Df.5.2.c. $\{T_1\} < \{T_2\} \Leftrightarrow \{T_1\} \leq \{T_2\}$ & $\rceil \{T_2\} \leq \{T_1\}$.

Сводя воедино изложенные выше результаты, можно выделить следующие теории-2.

1. Классическая силлогистика CS, представлена следующими реализациями: {C2, C3.1, ФС, КС, БС, C2V, ФВ, БВ, ФУ}.
2. Традиционная силлогистика TS, представлена следующими реализациями: {C4, C4B, У4}.
3. Булева алгебра, представлена следующими реализациями: {B, BA, С2Д, ФСД}.
4. Булева алгебра с атомами, {С2ДА, EO}.
5. {$C1^+$(1), ОФС(1)}.

Используя определенное в **Df.5.2** отношение порядка, можно построить граф, демонстрирующий отношения между теориями-2. Но чтобы учесть все упомянутые в данной работе теории-1, необходимо провести их дополнительное изучение и ответить на ряд вставших вопросов. Это тема уже отдельного исследования.

6. Множество силлогистических теорий

Ниже приведу несколько утверждений относительно мощности некоторых множеств силлогистических теорий-1.

Утверждение 1. Мощность множества силлогистических теорий не меньше мощности множества пропозициональных логик.

На базе любой пропозициональной логики можно построить, по крайней мере, одну свою, характеристическую силлогистику. Выберем некоторый силлогистический язык. Любую пропозициональную логику можно переформулировать в этом языке, не добавляя новых дедуктивных постулатов. Следовательно, для каждого языка таких вырожденных силлогистик будет столько же, сколько и самих пропозициональных логик.

Утверждение 2. Множество силлогистических теорий не менее чем континуально.

Известны континуальные классы пропозициональных логик (например, суперинтуиционистские логики). Мощность множества силлогистических теорий не меньше мощности множества пропозициональных логик (Утверждение 1). Следовательно, множество силлогистических теорий не менее чем континуально.

Утверждение 3. Множество чистых позитивных силлогистик, сформулированных на базе КЛВ, не менее чем счетно.

1. В [Шиян 2000, 2001] описано собственное расширение C4 (обозначенное как $C_=$), дефинициально эквивалентное бескванторной теории эквивалентности.

2. Теория эквивалентности синтаксически непротиворечива и не выдвигает никаких требований к мощности предметной области (кроме, может быть, ее непустоты). Следовательно, мы можем усиливать теорию эквивалентности,

добавляя требования о той или иной мощности нашей предметной области. Так мы можем получить счетное множество синтаксически непротиворечивых расширений теории эквивалентности (с мощностями предметной области 1, 2, 3, ...).
3. Из 1 и 2 следует, что существует по крайней мере счетное число синтаксически непротиворечивых расширений $C_=$.
4. Следовательно, множество чистых позитивных силлогистик, сформулированных на базе КЛВ, не менее чем счетно.

Список использованных обозначений логических теорий

Несиллогистические теории:
КЛВ - классическая логика высказываний.
КИОП1 - классическое исчисление одноместных предикатов первого порядка.
КИОП1= - классическое исчисление одноместных предикатов первого порядка с равенством.
$ИП^2$ - классическое исчисление предикатов первого порядка с равенством и аксиомой ($\exists x \exists y \rceil x=y$).
BA - булева логика классов.
B - булева алгебра.
EO - элементарная онтология Лесневского.

Чистые позитивные силлогистики:
C1 - {(MaP$\wedge$SaM)$\supset$SaP, (MeP$\wedge$SaM)$\supset$SeP, SeP$\supset$PeS, SaP$\supset$SiP, SeP$\equiv\rceil$SiP, SoP$\equiv\rceil$SaP}, система Слупецкого-Смирнова, [Смирнов 1980], [Маркин 1991].
$C1^+(1)$ - собственное расширение C1 с дополнительными правилами вывода, [Маркин 1991].
$C1^+(2)$ - собственное расширение C1, [Маркин 1998a].
C3 - C1+SiS, [Смирнов 1980], [Маркин 1991].
$C3^+$ - собственное расширение C3 с дополнительными правилами вывода, [Маркин 1991].
C3.1 - собственное расширение C3, [Маркин 1991].
C4 - реализация чистого позитивного фрагмента "традиционной" силлогистики, силлогистика Лукасевича, предложена в [Смирнов 1980].
EA - формализация C4 с правилом эктезиса, [Мчедлишвили 1999].
C2 - C1+SiP$\supset$SaS, реализация чистого позитивного фрагмента силлогистики Аристотеля, [Смирнов 1980], [Маркин 1991].
ФС - реализация чистого позитивного фрагмента фундаментальной силлогистики, [Маркин 1991].
КС - реализация чистого позитивного фрагмента силлогистики Льюиса Кэрролла, [Маркин 1991].
БС - реализация чистого позитивного фрагмента силлогистики Больцано, [Маркин 1991].
C= - собственное расширение C4 (C4+SiP$\supset$SaP) эквивалентное бескванторной теории эквивалентности [Шиян 2000].

Силлогистики васильевского типа:
CVA - C1+SiP$\supset$SiS, одна из реконструкций силлогистики Н.А. Васильева.
C2V - одна из реконструкций силлогистики Н.А. Васильева, см. [Смирнов 1994].

ФВ - формулировка фундаментальной силлогистики в стиле Васильева, [Костюк 1999].
БВ - формулировка силлогистики Больцано в стиле Васильева, [Костюк 1999].
С4В - формулировка традиционной силлогистики в стиле Васильева, [Костюк 1999].

Обобщенные силлогистики:

ОФС(1) - расширение ФС с одноместной силлогистической константой универсальности, [Маркин 1991].
ОФС(2) - расширение ФС с двухместными силлогистическими константами исчерпываемости и неисчерпываемости универсума объемами терминов, [Маркин 1998a].
ФУС - расширение ФС с двухместными силлогистическими константами исчерпываемости и неисчерпываемости универсума объемами терминов, [Ганиянц, Маркин 1997].
ФУ - подсистема ФУС, [Ганиянц, Маркин 1997].
ОС4 - расширение С4 с двухместными силлогистическими константами исчерпываемости и неисчерпываемости универсума объемами терминов, [Маркин 1999].
СУ4 - расширение С4 с двухместными силлогистическими константами исчерпываемости и неисчерпываемости универсума объемами терминов, [Ганиянц, Маркин 1997].
У4 - подсистема СУ4 [Ганиянц, Маркин 1997].

Сингулярные силлогистики:

$ФС^{c}_{a}$ - сингулярное расширение ФС аристотелевского типа [Маркин 1991].
$С2^{c}_{a}$ - сингулярное расширение С2 аристотелевского типа, [Маркин 1991].
$ФС^{c}_{o}$ - сингулярное расширение ФС оккамовского типа, [Маркин 1991].
$С2^{c}_{o}$ - сингулярное расширение С2 оккамовского типа, [Маркин 1991].

Негативные сингулярные силлогистики:

$НФС^{c}_{a}$ - сингулярное негативное расширение ФС аристотелевского типа, [Маркин 1991].
$НС2^{c}_{a}$ - аристотелевского типа, [Маркин 1991].
$НФС^{c}_{o}$ - сингулярное негативное расширение ФС оккамовского типа, [Маркин 1991].
$НС2^{c}_{o}$ - сингулярное негативное расширение С2 оккамовского типа, [Маркин 1991].
СА - сингулярное негативное расширение С2 аристотелевского типа, [Маркин 1997].
$СА^{+}$ - СА+(SiS$\vee$~Si~S), [Маркин 1997].
$ФС^{2}$ - сингулярное негативное расширение ФС оккамовского типа, $НФС^{c}_{o}$+~vi~v (v - некоторый сингулярный термин), [Маркин 1998b].
ТС - сингулярное негативное расширение С4 оккамовского типа, $НФС^{c}_{o}$+$\alpha i \alpha$ (α - произвольный термин), [Маркин 1998b].

Негативные сингулярные силлогистики:

НФС - негативное расширение ФС, [Ильин 2001].

Расширенные силлогистики:

АгС2 - расширенная до булевой алгебры С2 (формулировка Бочарова), [Бочаров 1983].
С2Д - расширенная до булевой алгебры С2 (формулировка Смирнова), [Смирнов 1983].
ФСД - расширенная до булевой алгебры ФС, [Маркин 1991].

Кванторные формулировки:
С2ДА - кванторный вариант С2Д с атомами, [Смирнов 1993].

Литература

1. [Бежанишвили, Мчедлишвили 1985] Бежанишвили М.Н., Мчедлишвили Л.И., Позитивная силлогистика и логика предикатов // Логика Аристотеля. Тбилиси, 1985.
2. [Бочаров 1980] Бочаров В.А., Алгебраические реконструкции силлогистики // Логико-методологические исследования. М., 1980.
3. [Бочаров 1983] Бочаров В.А., Булева алгебра в терминах силлогистики // Логические исследования. М., 1983.
4. [Бочаров 1985] Бочаров В.А., Интерпретация ассерторической силлогистики Аристотеля // Логика Аристотеля. Тбилиси, 1985.
5. [Бочаров 1998] Бочаров В.А., Дефинициальная эквивалентность элементарной онтологии и силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998.
6. [Ганиянц, Маркин 1997] Ганиянц И.И., Маркин В.И., Силлогистики с константой исчерпываемости // Международная конференция "Развитие логики в России: итоги и перспективы". Тезисы докладов и сообщений. М., 1997.
7. [Ильин 2001] Ильин А.А., Негативная фундаментальная силлогистика // Смирновские чтения. 3 Международная конференция. М., 2001
8. [Канаи 1993] Канаи Н., Доказательство погружения аристотелевской силлогистики в пропозициональную логику // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993.
9. [Костюк 1999] Костюк Т.П., Позитивные силлогистики Васильевского типа // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
10. [Лукасевич 1959] Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
11. [Маркин 1983] Маркин В.И., Семантическое доказательство погружаемости некоторых систем силлогистики в исчисление предикатов // Логические исследования. М., 1983.
12. [Маркин 1986] Маркин В.И., Аксиоматизация фундаментальной силлогистики Г. Лейбница // Философские проблемы истории логики и методологии науки. Часть I. М., 1986.
13. [Маркин 1991] Маркин В.И., Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
14. [Маркин 1997] Маркин В.И., Сингулярная негативная силлогистика Аристотеля и свободная логика // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997.
15. [Маркин 1998а] Маркин В.И., Системы силлогистики, адекватные двум переводам силлогистических формул в исчисление предикатов В.А.

Смирнова // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998.
16. [Маркин 1998b] Маркин В.И., Формальная реконструкция традиционной сингулярной негативной силлогистики // Логические исследования. Вып. 5. М.: Наука, 1998.
17. [Маркин 1999] Маркин В.И., Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
18. [Мчедлишвили 1986] Мчедлишвили Л.И., Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.
19. [Мчедлишвили 1999] Мчедлишвили Л.И., К семантике аподиктической силлогистики Аристотеля // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
20. [Смирнов 1980] Смирнов В.А., Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.
21. [Смирнов 1983a] Смирнов В.А., Дефинициальная эквивалентность расширенной силлогистики С2Д булевой алгебре // Логические исследования. М., 1983.
22. [Смирнов 1983b] Смирнов В.А., Погружение систем позитивной силлогистики в одноместное исчисление предикатов // Логические исследования. М., 1983.
23. [Смирнов 1987] Смирнов В.А., Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987.
24. [Смирнов 1989] Смирнов В.А., Логические идеи Н.А. Васильева и современная логика // Н.А. Васильев. Воображаемая логика. М., 1989.
25. [Смирнов 1993] Смирнов В.А., Дефинициальная эквивалентность элементарной онтологии и обобщенной силлогистики оккамовского типа // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993.
26. [Смирнов 1994] Смирнов В.А., Дефинициальная эквивалентность систем силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1993. М., 1994.
27. [Шиян 2000] Шиян Т.А., Классификация теорий чистой позитивной силлогистики // Логические исследования, №4, www.logic.ru. ISBN 5-85593-140-4.
28. [Tarski 1956] Tarski A., Foundations of the calculus of system // Logic, semantics, metamathematics. Oxford, 1956.
29. [Vieru 1971] Vieru S., Embedding of assertoric syllogistic into the predicate calculus // 4-th International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Bucharest, 1971.